第 11 讲 刚体对轴的角动量守恒定律　习题课

教学要求

掌握刚体对轴的角动量守恒定律。

重点与难点

重点：角动量守恒定律。

难点：角动量守恒定律。

3.4.3 刚体对轴的角动量守恒定律

由式(3-28)可以看出,当物体所受的合外力矩为零,即 $M=0$,则有

$$L_z = J\omega = \text{恒量} \tag{3-29}$$

式(3-29)表明：**如果物体所受的外力对给定轴的合力矩等于零,或者不受外力矩的作用,物体的角动量保持不变**，这个结论叫做刚体定轴转动的角动量守恒定律。

说明 1 物体绕定轴转动，如果转动惯量不变，则角动量守恒，即角速度为常数，物体做匀速转动；如果转动惯量可以改变，则物体的角速度也随之改变，但两者之积保持不变，即 $J_0\omega_0 = J\omega$ 或 $\omega = \dfrac{J_0\omega_0}{J}$ ，转动惯量增大，转动角速度减小；反之，转动惯量减小，转动角速度增大。

2 当转动系统是由多个物体组成,则该系统的角动量守恒定律为

$$\sum_i J_i\omega_i = \text{恒量}$$

3 运动物体与定轴转动物体碰撞时，由于相互作用时间极短，有限的外力矩的冲量矩可以忽略，运动物体与定轴转动物体组成的系统的角动量守恒；但是，由于固定转轴可能受到很大约束力，其冲量不能忽略，所以动量一般不守恒。

4 应用角动量定理和角动量守恒定律解题思路：选定研究对象，进行受力分析，计算各个力的力矩，分析是否满足守恒条件；确定研究对象初态和末态角速度的方向，即角动量的方向；规定力矩、角动量的正方向，根据定理或定律列方程。列方程时注意方程中角速度必须对同一参考系、转动惯量是对同一转轴。

在前面各章，我们介绍了描述平动和转动的基本物理量、基本运动规律，现列表如下，以供参考。

表 3-2 质点的运动规律与刚体的定轴转动规律对比

质点的运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度 $\vec{\upsilon}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
力 $\vec{F}$ 、质量 m 、加速度 $\vec{a}$ ， 运动定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	力矩 M 、转动惯量 J 、角加速度 α ， 转动定律 $M=J\alpha$
动量 $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ 冲量 $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t$ 动量定理 $\vec{I}=\Delta\vec{p}$	角动量 $L=J\omega$ 冲量矩 $\int_{t_0}^{t}M\mathrm{d}t$ 角动量定理 $\int_{t_0}^{t}M\mathrm{d}t=\Delta L$
动量守恒定律 $\sum_i\vec{F}_i=0,\ \sum_i m_i\vec{\upsilon}_i=$常量	角动量守恒定律 $\sum_i M_i=0,\sum_i J_i\omega_i=$常量
平动动能 $E_k=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$ 力的功 $W=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ 动能定理 $W=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2-\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2$	转动动能 $E_k=\dfrac{1}{2}J\omega^2$ 力矩的功 $W=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta$ 动能定理 $W=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_p=mgh$	重力势能 $E_p=mgh_C$
机械能守恒定律 只有保守内力做功， $E_k+E_p=$常量	机械能守恒定律 只有保守内力做功， $E_k+E_p=$常量

例 3-15 如图 3-25，质量为 m，长为 l 的均匀细棒，可绕过其一端的水平轴 O 转动.现将棒拉到水平位置(OA')后放手，棒下摆到竖直位置(OA)时，与静止放置在水平面 A 处的质量为 M 的物块作完全弹性碰撞，物体在水平面上向右滑行了一段距离 s 后停止.设物体与水平面间的摩擦系数 μ 处处相同，求证

$$\mu=\frac{6\mathrm{m}^2l}{(\mathrm{m}+3\mathrm{M})^2\mathrm{s}}$$

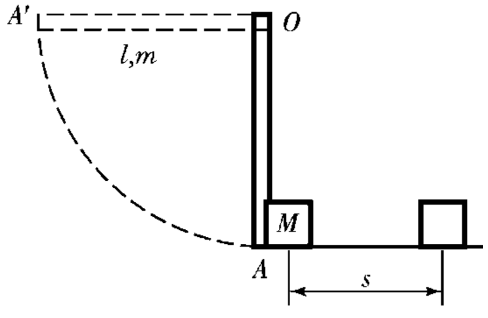


图 3-25 例 3-15 图

解　此题可分解为三个简单过程：

(1)棒由水平位置下摆至竖直位置但尚未与物块相碰.此过程机械能守恒.以棒、地球为一系统，以棒的重心在竖直位置时为重力势能零点，则有

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2 \quad ①$$

(2)棒与物块作完全弹性碰撞，此过程角动量守恒(并非动量守恒)和机械能守恒，设碰撞后棒的角速度为 ω' ，物块速度为 v，则有

$$\frac{1}{3}ml^2\omega=\frac{1}{3}ml^2\omega'+lMv \quad ②$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^{2\,'}+\frac{1}{2}Mv^2 \quad ③$$

(3)碰撞后物块在水平面滑行，其满足动能定理

$$-\mu mgs=0-\frac{1}{2}Mv^2 \quad ④$$

联立以上四式，即可证得：

$$\mu=\frac{6\mathrm{m}^2 l}{(\mathrm{m}+3\mathrm{M})^2\mathrm{s}}$$

例 3-16　工程上，两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动，如图 3-26 所示，A 和 B 两飞轮的轴杆在同一中心线上，A 轮的转动惯量为 $J_{\mathrm{A}}=10\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$，B 轮的转动惯量为 $J_{\mathrm{B}}=20\ \mathrm{kg}\ \mathrm{m}^2$，开始时 A 轮的转速为 $600\ \mathrm{r/min}$，B 轮静止。C 为摩擦啮合器。假设转轴光滑，求两轮摩擦啮合中，两轮的机械能有何变化？

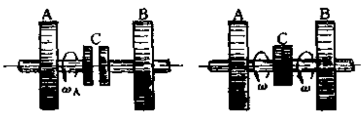


图 3-26 例 3-16 图

解 以飞轮 A 、B 和啮合器 C 为系统，在啮合过程中，系统受到的轴向正压力对转轴的力矩为零，啮合器 C 的摩擦力为系统内力，内力矩之和为零。系统没有受到其它外力矩，所以系统角动量守恒。设两轮啮合后共同的角速度为 ω，有

$$J_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}}+J_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}}=(J_{\mathrm{A}}+J_{\mathrm{B}})\omega$$

解得

$$\omega=\frac{J_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}}+J_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}}}{J_{\mathrm{A}}+J_{\mathrm{B}}}=\frac{20}{3}\pi=20.9\ (\mathrm{rad/s})$$

在啮合过程中，摩擦力矩作功，机械能不守恒，损失的机械能转化为内能. 损失的机械能为

$$\Delta E=\frac{1}{2}J_A\omega_A^2-\frac{1}{2}\left(J_A+J_B\right)\omega^2=1.32\times10^4 J$$

问题 3-10 在文艺体育活动中，有很多应用角动量守恒定律的实例如（1）跳水运动员完美地完成空翻动作并很好地压水；（2）花样滑冰运动员或芭蕾舞蹈演员想加速旋转时，先把两臂和一条腿伸开，并绕通过足尖的垂直轴转以 ω_0 旋转，然后再收拢腿和臂等。说明他们做法中蕴含的物理原理。

习题课

第 3 章　刚体力学基础

课程内容

3.1 刚体 刚体定轴转动的描述

3.2 力矩 刚体定轴转动的转动定律

3.3 刚体定轴转动的动能定理

3.4 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒律

教学要求

了解刚体、定轴转动的定义，角速度矢量的定义。

理解力矩定义、转动惯量定义，理解刚体的转动动能，理解刚体的角动量。

掌握刚体定轴转动定律及应用。掌握动能定理及计算。掌握角动量定理和角动量守恒律。

重点与难点

重点：刚体定轴转动的转动定律。

难点：刚体定轴转动的角动量及计算

3.1　刚体　　刚体定轴转动的描述

3.1.1　刚体的引入

研究刚体力学时，通常把刚体分成许多部分，每一部分都小到可看作质点，叫作刚体的质元。由于刚体不变形，各质元间的距离不变。各质元间的距离保持不变的质点系叫作不变质点系。把刚体看作不变质点系并运用已知的质点系的运动规律去研究，这是刚体力学的基本方法。

3.1.2　刚体的基本运动

刚体最基本的运动形式：平动、转动。

1 刚体的平动

刚体平动 $\Rightarrow$ 质点运动

2 刚体的转动

如果刚体运动时，若刚体中各质元都绕同一直线做圆周运动，称为刚体的转动。转动又分定轴转动和非定轴转动 。若转轴的方向或位置随时间变化，这样的运动称为刚体的非定轴转动，该转轴称为转动瞬轴；若转轴固定不动，即既不改变方向又不发生平移，这样的转动称为刚体的定轴转动。本章主要介绍刚体定轴转动的一些基本规律。

3.1.3 刚体定轴转动的描述

1 角位移、角速度和角加速度

转动平面上任一质元对原点的位矢 $\vec{r}$ 与极轴的夹角称为角位置 θ，刚体在一段时间内转过的角度（即末时刻与初始时刻的角位置之差）$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ 称为角位移。

在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的角位移 $\Delta\theta$ 与 Δt 之比称为刚体的平均角速度，用 $\bar{\omega}$ 表示：

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均角速度的极限称为瞬时角速度，简称角速度，用 ω 表示：

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad （3－1）$$

角速度的单位是弧度每秒（rad/s）。

在 Δt 时间内，角速度的改变量 $\Delta\omega$ 与 Δt 之比称为该段时间内刚体的平均角加速度，用 $\bar{\alpha}$ 表示：$\bar{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$，当 $\Delta t \to 0$ 时，平均角加速度的极限称为瞬时角加速度，简称角加速度，用 α 表示：

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad （3－2）$$

角加速度的单位是弧度每二次方秒（rad/s^2）。

由以上讨论可知，刚体的定轴转动与质点的直线运动相似，只要在描写质点直线运动各物理量（位移、速度、加速度）前加一个“角”字，就成了描述刚体定轴转动的各相应物理量（角位移、角速度、角加速度），两者的运动学关系也完全相似：

定轴转动　　　　　　　　　　直线运动

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\text{，} \qquad v = \frac{dx}{dt}\text{；}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}\text{，} \qquad a = \frac{dv}{dt}\text{；}$$

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha dt\text{，} \qquad v - v_0 = \int_0^t a dt\text{；}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega dt\text{，} \qquad x - x_0 = \int_0^t v dt\text{。}$$

2 角量与线量的关系

若刚体上某质元 i 到转轴的距离为 r_i. 则该质元的线速度为

$$v_i = \omega r_i$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{i\tau} = \alpha r_i \qquad a_{in} = \omega^2 r_i$$

3. 2　力矩　刚体定轴转动的转动定律

3.2.1　力矩

力矩可分为力对点的力矩和力对轴的力矩。因此，我们先讨论力对点的力矩。

力对 *O* 点的力矩

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3\text{-}3)$$

（2） 设力 $\vec{F}$ 与位矢 $\vec{r}$ 间的夹角为 θ，则力矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 的大小为

$$M_O(\vec{F}) = rF\sin\theta \qquad (3\text{-}4)$$

即等于由 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 构成平行四边形的面积[如图 3-3 (a)]。在式（3-3）中，$d = r\sin\theta$ 是 O 点到力的作用线的垂直距离[如图 3-3 (a)]，称为力对 O 点的**力臂**。因此，力矩的大小可以表示为力的大小与力臂的积。

2 对于质点系，内力是以作用力和反作用力的形式成对出现的，任一对内力大小相等，方向相反, 而它们的作用点对 O 点的位矢相等，所以一对内力矩的大小相等、方向相反，它们的矢量和为零。由此可知,质点系的所有内力对任一参考点的力矩的矢量和为零。

3 力矩在直角坐标系中的计算

设力 $\vec{F}$ 与其作用点相对于参考点 O 的位矢 $\vec{r}$ 在直角坐标系中可表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\text{，} \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

根据式(3-3)有

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k} \quad (3\text{-}5)$$

因此，力矩$\vec{M}_O(\vec{F})$在x、y和z轴上的投影分别为

$$\begin{aligned}[\vec{M}_O(\vec{F})]_x&=yF_z-zF_y\\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_y&=zF_x-xF_z\\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_z&=xF_y-yF_x\end{aligned} \quad (3\text{-}6)$$

注意　由上述计算可知，力矩的大小和方向都与参考点O的选择有关。因此，在计算力矩时，必须说明参考点。

力矩的单位为牛·米（N·m）。

力对固定转轴的力矩

$$M_z=rF'\sin\theta=F'd \quad \textbf{(3-7)}$$

式中θ是$\vec{F}'$与$\vec{r}$的夹角，力臂$d=r\sin\theta$是z轴到$\vec{F}'$作用线的垂直距离。为简化起见，在涉及定轴转动问题时，除非特别说明，都认为力$\vec{F}$在某一转动平面内。

说明 如果刚体同时受几个力的作用，则刚体定轴转动的合力矩等于各分力矩的代数和，即

$$M_z=\sum_i M_{iz} \quad \textbf{(3-8)}$$

M_{iz}的正负按右手螺旋法则确定：当它使刚体转动的转向与右手螺旋的转向一致时，螺旋前进的方向如果沿转轴Oz，则为正；反之为负。

3.2.2 刚体定轴转动的转动定律

转动惯量，用J表示，即

$$J=\sum_i m_i r_i^2 \quad \textbf{(3-9)}$$

则得

$$M=J\alpha \quad \textbf{(3-10)}$$

式（3-10）表明：刚体定轴转动时，它的角加速度α与所受合外力矩M成正比，与转动惯量J成反比。

此即**刚体定轴转动定律**。

刚体定轴转动定律和牛顿第二定律相比较，形式相似，地位相当。

1. 牛顿第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$，式中 $\vec{F}$ 为质点受到的外力；m 为质量，为质点平动惯性的量度；$\vec{a}$ 为力 $\vec{F}$ 所产生的平动效果，改变物体的运动状态，且与 $\vec{F}$ 的方向相同。

2. 刚体定轴转动定律 $M=J\alpha$，式中 M 为刚体受到的外力矩；J 为刚体定轴转动的转动惯量，为刚体转动惯性的量度；α 为力矩 M 所产生的转动效果，改变刚体的转动状态，且与 M 的方向相同。

3.2.3 转动惯量的计算

1 若刚体是由离散分布的质点组成，则转动惯量 J 按式（**3-9**）计算；

2 若刚体质量是连续分布的，则转动惯量 J 按下式计算；

$$J=\int_m r^2\mathrm{d}m \tag{3-11}$$

式（3-11）中 r 为质元 $\mathrm{d}m$ 到转轴的垂直距离，而质元 $\mathrm{d}m$ 的表示方法有三种情况：

（1）刚体是一维线分布的，定义质量线密度 $\lambda=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$，则 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$；

（2）刚体是二维面分布的，定义质量面密度 $\sigma=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$，则 $\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}S$；

（3）刚体是三维体分布的，定义质量体密度 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$，则 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$。

3 转动惯量具有可加性，当一个刚体由几部分组成时，可以分别计算各个部分对转轴的转动惯量，然后把结果相加就可以得到整个刚体的转动惯量即

$$J=J_1+J_2+J_3+\cdots+J_n$$

应用下列两个定理，常可简化转动惯量的计算 。

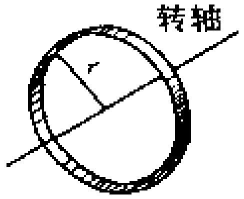
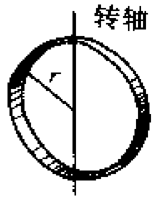
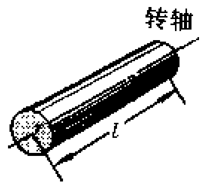
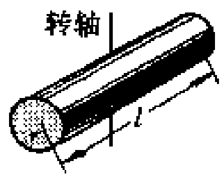
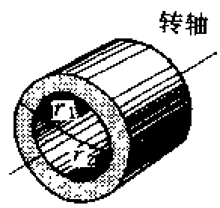
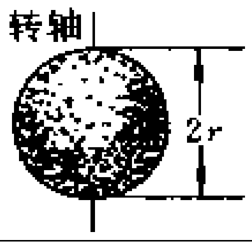
平行轴定理 若质量 m 的刚体对通过质心的轴的转动惯量为 J_C，若将轴沿任何方向平行移动距离 d（图 3-9），则绕该轴的转动惯量为

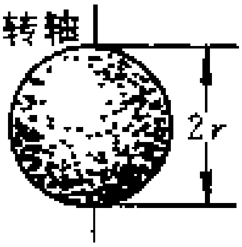
$$J=J_c+md^2 \tag{3-12}$$

正交轴定理 对于质量分布在 Oxy 平面上的薄板刚体，绕 z 轴的转动惯量 J_z 等于绕 x 轴的转动惯量 J_x 与绕 y 轴的转动惯量 J_y 的和（图 3-10），即

$$J_z=J_x+J_y \tag{3-13}$$

表3-1 常见规则刚体的转动惯量

圆环	转轴过中心且与环面垂直	$J = mr^2$ （r 为半径）	
圆环	转轴沿环直径	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆盘	转轴过中心且和盘面垂直	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆柱体	转轴沿几何轴	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆柱体	过中心且和几何轴垂直	$J = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{ml^2}{12}$ （r 为半径，l 为柱长）	
空心圆柱体	转轴沿几何轴	$J = \dfrac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ （r_1 为内半径，r_2 为外半径）	
实心圆球	转轴沿直径	$J = \dfrac{2}{5}mr^2$ （r 为半径）	

球壳	转轴沿直径	$J=\frac{2}{3}mr^2$ （r 为半径）	

3.2.4　转动定律的应用

3.3　刚体定轴转动的动能定理

3.3.1 刚体定轴转动的转动动能

整个刚体的动能

$$E_k=\frac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (3\text{-}14)$$

上式表明：**刚体定轴转动的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度平方的乘积的一半。**

3.3.2　刚体定轴转动中力矩的功

$$\mathrm{d}W=M\mathrm{d}\theta \qquad (3\text{-}15)$$

式（3-15）说明：**作用在定轴转动刚体上力 $\vec{F}$ 的元功 $\mathrm{d}W$，等于该力对转轴的力矩 M 与刚体角位移 $\mathrm{d}\theta$ 的乘积**，这个元功也称为**力矩的元功**。

如果刚体从 θ_0 转到 θ，则这一过程中力矩所作的功

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta \qquad (3\text{-}16)$$

若力矩 M 为常量,则上式可以进一步写成

$$W=M(\theta-\theta_0) \qquad (3\text{-}17)$$

讨论 1　如果有多个外力作用于刚体,式（3-16）和式（3-17）中的 M 应为诸外力对转轴的合力矩 $\sum_i M_i$ 。

2 力矩的功实质上仍是力做的功，只不过对于刚体转动的情况，力的功可以用力矩和角位移的乘积来表示。

力矩的功率是

$$P=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega \qquad (3\text{-}18)$$

当输出功率一定时，力矩与角速度成反比。

3.3.3　刚体定轴转动的动能定理

若刚体在外力矩作用下，角位置从θ_0变到θ，角速度从ω_0变到ω，则

$$\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_0}^{\omega}J\omega\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad (3\text{-}19)$$

由式(3-19)可知,等式左边是外力矩对刚体做的功。式(3-19)表明：**刚体定轴转动时，合外力矩的功等于刚体转动动能增量**，这就是**刚体定轴转动的动能定理**。

3. 4 刚体定轴转动的角动量定理 角动量守恒定律

3.4.1　角动量　质点的角动量定理及角动量守恒定律

1 质点的角动量

设质点的动量为$\vec{p}$，**对**O**点的位矢为**$\vec{r}$**。定义** 质点对O点的**角动量**为**质点相对于**O**的位矢**$\vec{r}$**与质点的动量**$\vec{p}$**的矢量积，**用符号$\vec{L}$表示，即

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \qquad (3\text{-}20)$$

角动量是矢量，由矢积的定义可知，角动量$\vec{L}$的方向垂直于由动量$\vec{p}$与作用点的位矢$\vec{r}$确定的平面，指向可由$\vec{r}$和$\vec{p}$的方向按右手螺旋法则确定。设质点的动量$\vec{p}$与位矢$\vec{r}$间的夹角为θ，则角动量$\vec{L}$的大小为

$$L=rp\sin\theta=rm\upsilon\sin\theta \qquad (3\text{-}21)$$

当质点作圆周运动时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，这时质点对圆心O点的角动量大小为

$$L=rp=rm\upsilon=mr^2\omega$$

考虑到$\vec{r}\times\vec{p}$的方向与$\vec{\omega}$的方向一致，所以角动量的矢量形式为

$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}$$

如果质点做匀速圆周运动，即$\vec{\omega}$不变，则质点的角动量保持不变，但动量则是各点不同的。而且要注意的是，在作匀速圆周运动的情况下，所受的向心力是恒指向圆心的。

2 质点的角动量定理

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{3-23}$$

式（3-23）表明，**质点所受合力对O点的力矩等于质点对O点的角动量的时间变化率**。这就是质点角动量定理的微分形式。其积分形式为式（3-24）

将式（3−23）写成 $\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$，两边积分有

$$\int_{t_0}^{t}\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0 \tag{3-24}$$

式（3-24）中$\vec{L}_0$和$\vec{L}$分别为质点在时刻t_0和t对参考点O的角动量。

定义 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t$为质点所受合力在时间间隔$t-t_0$内对参考点$O$的**冲量矩**，因此，式（3-24）的物理意义是：**质点所受合力对O点的冲量矩等于质点对O点的角动量的增量。**

说明（1） 式（3-23）与牛顿第二定律$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$在形式上是相似的，即$\vec{M}_0(\vec{F})$对应着$\vec{F}$，$\vec{L}$对应着$\vec{p}$，它反映了力矩是角动量变化的原因。

（2） 质点的角动量定理是一个矢量关系，具体应用时常用直角坐标系中的分量形式。

3　质点角动量守恒定律

由式(3-23)可以看出，若质点所受合力矩为零，即$\vec{M}=0$，则有

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}=\text{常矢量} \tag{3-25}$$

上式表明，**当质点所受合力对O点的力矩等于零，那么质点对O点的角动量保持不变，**此即**质点的角动量守恒定律**。

说明 **（1）** 质点角动量守恒的条件是$\vec{M}=0$，通常有两种情况：

1）$\vec{F}=0,$即质点所受的合外力为零。如质点作匀速直线运动，它对任意定点的角动量为常矢量。

2）合力不为零，但合力矩为零。最常见的是**有心力**的情况。即**合力$\vec{F}$通过参考点O，致使合力矩为零**。如（Ⅰ）质点作匀速圆周运动时，作用于质点的合力都通过圆心，其力矩为零，故质点对圆心的角动量是守恒的。（Ⅱ）太阳系中行星运动的轨道为椭圆，太阳位于两焦点之一，太阳作用于行星的引力是指向太阳的有心力，如以太阳为参考点O，则行星的角动量是守恒的。（Ⅲ）当带电粒子入射到质量较大的原子核附近发生碰撞时，这时粒子所受的原子核的库仑力始终通过原子核的中心（即力心），所以微观粒子在该碰撞过程中对该

力心的角动量是守恒的。

（2） 外力矩的矢量和为零，此时合外力可不为零，亦即动量未必守恒。

（3） 力矩与角动量都是对惯性系中某一固定参考点而言的，所选取的参考点不同，力矩及角动量的大小、方向也不同。因此，对某一参考点的角动量守恒时，对另一参考点的角动量未必守恒。

3.4.2 刚体对轴的角动量　刚体定轴转动的角动量定理

1 刚体对轴的角动量

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)\omega$$

由转动惯量的定义,上式即为

$$L_z = J\omega \qquad (3\text{-}26)$$

式(3-26)表明:**刚体对定轴的角动量等于刚体对定轴的转动惯量与角速度的乘积**。

注意 **（1）** 角动量L_z是代数量,其正负与ω相同，按右手螺旋法则决定：使右手螺旋转动的方向和刚体的转向相一致，若螺旋前进的方向与Oz轴方向一致，则$\omega > 0$，$L_z > 0$；否则$\omega < 0$，$L_z < 0$。

（2） 任何物体绕Oz轴作定轴转动，则其角动量仍可写成$L_z = J\omega$的形式，只不过物体在转动过程中，转动惯量J可以是变化的。

（3） 将$L_z = J\omega$与$\vec{p} = m\vec{v}$对比可见它们的相似性。这使我们进一步认识到转动惯量J是质点系对转轴的转动惯性大小的量度。

2 刚体定轴转动的角动量定理

根据转动定律，且在牛顿力学中，对于给定的转动轴，刚体的转动惯量为常数，于是有

$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \qquad (3\text{-}27)$$

上式表示，**刚体所受到的对某给定轴的总外力矩等于刚体对此轴的角动量的时间变化率**。这是**刚体定轴转动的角动量定理的微分形式。**

注意　对于刚体，它对给定轴的转动惯量J是保持不变的，因此式（3-27）与式

$M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha$ 的意义完全一样。但式(3-27)的适用范围更为广泛,可以适用于刚体,也可以适用于非刚体,即当绕定轴转动物体的转动惯量 J 可以变化时，式 $M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha$ 不再适用，但式（3-27）仍成立。

将式（3-27）写成 $M\mathrm{d}t=\mathrm{d}L_z$，两边积分有

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t = L_z - L_{0z} \tag{3-28}$$

式(3-28)中,$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t$ 为是时间间隔 $t-t_0$ 内合外力矩 M 对轴的的**冲量矩，**单位为牛·米·秒 $(\mathrm{N\cdot m\cdot s})$。$L_{0z}$ 和 L_z 分别为刚体在时刻 t_0 和 t 对定轴的角动量。上式说明:**刚体所受合外力矩的冲量矩等于在这段时间间隔内的角动量的增量**,这就是**刚体定轴转动的角动量定理的积分形式**。

讨论（1）对于刚体，它对给定轴的转动惯量 J 是保持不变的，式（3-28）可以写成

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$$

上式中，ω_0 和 ω 分别为刚体在时刻 t_0 和 t 的角速度。

（2）如果物体在转动过程中，物体内各质点相对于转轴的位置发生了变化，那么物体的转动惯量 J 也必然随时间变化。时间间隔 $t-t_0$ 内，转动惯量由 J_0 变为 J，则式（3-28）可写成

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t = J\omega - J_0\omega_0$$

3.4.3 刚体对轴的角动量守恒定律

由式(3-28)可以看出,当物体所受的合外力矩为零,即 $M=0$,则有

$$L_z = J\omega = 恒量 \tag{3-29}$$

式(3-29)表明：**如果物体所受的外力对给定轴的合力矩等于零,或者不受外力矩的作用,物体的角动量保持不变**，这个结论叫做刚体定轴转动的角动量守恒定律。

说明 1 物体绕定轴转动，如果转动惯量不变，则角动量守恒，即角速度为常数，物体做匀速转动；如果转动惯量可以改变，则物体的角速度也随之改变，但两者之积保持不变，即 $J_0\omega_0=J\omega$ 或 $\omega=\frac{J_0\omega_0}{J}$，转动惯量增大，转动角速度减小；反之，转动惯量减小，转动角速度增大。

2 当转动系统是由多个物体组成,则该系统的角动量守恒定律为

$$\sum_i J_i\omega_i = \text{恒量}$$

3 运动物体与定轴转动物体碰撞时，由于相互作用时间极短，有限的外力矩的冲量矩可以忽略，运动物体与定轴转动物体组成的系统的角动量守恒；但是，由于固定转轴可能受到很大约束力，其冲量不能忽略，所以动量一般不守恒。

4 应用角动量定理和角动量守恒定律解题思路：选定研究对象，进行受力分析，计算各个力的力矩，分析是否满足守恒条件；确定研究对象初态和末态角速度的方向，即角动量的方向；规定力矩、角动量的正方向，根据定理或定律列方程。列方程时注意方程中角速度必须对同一参考系、转动惯量是对同一转轴。

表 3-2 质点的运动规律与刚体的定轴转动规律对比

质点的运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度 $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
力 $\vec{F}$ 、质量 m 、加速度 $\vec{a}$ ， 运动定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	力矩 M 、转动惯量 J 、角加速度 α ， 转动定律 $M = J\alpha$
动量 $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ 冲量 $\vec{I} = \int_{t_0}^{t}\vec{F}dt$ 动量定理 $\vec{I} = \Delta\vec{p}$	角动量 $L = J\omega$ 冲量矩 $\int_{t_0}^{t} Mdt$ 角动量定理 $\int_{t_0}^{t} Mdt = \Delta L$
动量守恒定律 $\sum_i \vec{F}_i = 0,\ \sum_i m_i\vec{\upsilon}_i =$ 常量	角动量守恒定律 $\sum_i M_i = 0,\ \sum_i J_i\omega_i =$ 常量
平动动能 $E_k = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$ 力的功 $W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 动能定理 $W = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2$	转动动能 $E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2$ 力矩的功 $W = \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$ 动能定理 $W = \dfrac{1}{2}J\omega^2 - \dfrac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_p = mgh$	重力势能 $E_p = mgh_C$
机械能守恒定律	机械能守恒定律

只有保守内力做功，$E_k + E_p$ =常量	只有保守内力做功， $E_k + E_p$ =常量

例 1 选择题

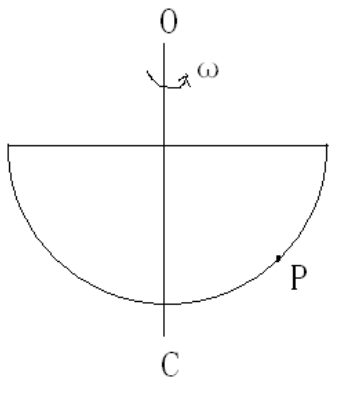
(1) 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度 ω_0转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为

(A) $\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$ (B) $\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$ (C) $\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$ (D) ω_0

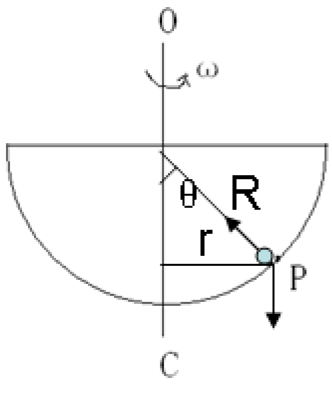
[答案： (A)]

(2) 如题 1（2）图所示，一光滑的内表面半径为 10cm 的半球形碗，以匀角速度 ω 绕其对称轴 OC 旋转，已知放在碗内表面上的一个小球 P 相对于碗静止，其位置高于碗底 4cm，则由此可推知碗旋转的角速度约为

(A)13rad/s (B)17rad/s (C)10rad/s (D)18rad/s



(a)

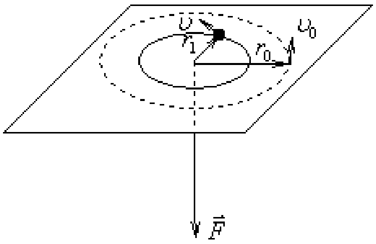


(b)

题 1（2）图

[答案： (A)]

(3)如 1(3)图所示，有一小块物体，置于光滑的水平桌面上，有一绳其一端连结此物体，；另一端穿过桌面的小孔，该物体原以角速度 ω 在距孔为 R 的圆周上转动，今将绳从小孔缓慢往下拉，则物体



题 1(3)图

（A）动能不变，动量改变。　　（B）动量不变，动能改变。

（C）角动量不变，动量不变。　（D）角动量改变，动量改变。

（E）角动量不变，动能、动量都改变。

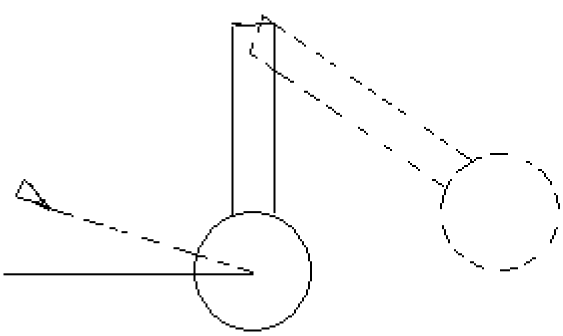
［答案：(E)］

例 2 填空题

(1) 半径为 30cm 的飞轮，从静止开始以 0.5rad·s^{-2}的匀角加速转动，则飞轮边缘上一点在飞轮转过 240°时的切向加速度 a_τ=________________，法向加速度 a_n=________________。

［答案：$0.15m\cdot s^{-2}$；　$1.256m\cdot s^{-2}$］

(2) 如题 2（2）图所示，一匀质木球固结在一细棒下端，且可绕水平光滑固定轴 O 转动，今有一子弹沿着与水平面成一角度的方向击中木球而嵌于其中，则在此击中过程中，木球、子弹、细棒系统的________________守恒，原因是________________。木球被击中后棒和球升高的过程中，对木球、子弹、细棒、地球系统的守恒。



题 2（2）图

［答案：对 o 轴的角动量守恒，因为在子弹击中木球过程中系统所受外力对 o

轴的合外力矩为零，机械能守恒]

(3) 两个质量分布均匀的圆盘 A 和 B 的密度分别为 ρ_A 和 ρ_B($\rho_A>\rho_B$)，且两圆盘的总质量和厚度均相同。设两圆盘对通过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则有 J_A____J_B 。（填>、<或=）

[答案： <]

例 3　一质量为 m 的质点位于 (x_1, y_1) 处，速度为 $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$，质点受到一个沿 x 负方向的力 f 的作用，求相对于坐标原点的角动量以及作用于质点上的力的力矩.

解：由题知，质点的位矢为

$$\vec{r}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$$

作用在质点上的力为

$$\vec{f}=-f\vec{i}$$

所以，质点对原点的角动量为

$$\vec{L}_0=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\times m(v_x\vec{i}+v_y\vec{j})$$

$$=(x_1mv_y-y_1mv_x)\vec{k}$$

作用在质点上的力的力矩为

$$\vec{M}_0=\vec{r}\times\vec{f}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\times(-f\vec{i})=y_1f\vec{k}$$

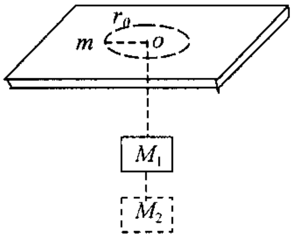
例 4 哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆.它离太阳最近距离为 r_1＝8.75×10^{10}m 时的速率是 v_1＝5.46×10^4m·s^{-1}，它离太阳最远时的速率是 v_2＝9.08×10^2m·s^{-1}，这时它离太阳的距离 r_2 是多少?(太阳位于椭圆的一个焦点。)

解：哈雷彗星绕太阳运动时受到太阳的引力——即有心力的作用，所以角动量守恒；又由于哈雷彗星在近日点及远日点时的速度都与轨道半径垂直，故有

$$r_1mv_1=r_2mv_2$$

$$\therefore \quad r_2 = \frac{r_1 v_1}{v_2} = \frac{8.75\times10^{10}\times5.46\times10^4}{9.08\times10^2} = 5.26\times10^{12}\ \text{m}$$

例 5 平板中央开一小孔，质量为m的小球用细线系住，细线穿过小孔后挂一质量为M_1的重物. 小球作匀速圆周运动，当半径为r_0时重物达到平衡. 今在M_1的下方再挂一质量为M_2的物体，如题5图. 试问这时小球作匀速圆周运动的角速度ω'和半径r'为多少?



题 5 图

解：在只挂重物时M_1，小球作圆周运动的向心力为$M_1 g$，即

$$M_1 g = m r_0 \omega_0{}^2 \qquad ①$$

挂上M_2后，则有

$$(M_1 + M_2) g = m r' \omega'^2 \qquad ②$$

重力对圆心的力矩为零，故小球对圆心的角动量守恒.

即 $\quad r_0 m v_0 = r' m v' \quad \Rightarrow r_0^2 \omega_0 = r'^2 \omega' \qquad ③$

联立①、②、③得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}} \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$r' = \frac{M_1 + M_2}{m \omega'^2} g = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot r_0$$

例 6 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕其光滑的水平对称轴OO'转动. 设大小圆柱体的半径分别为R和r，质量分别为M和m. 绕在两柱体上的细绳分别与物体m_1和m_2相连，m_1和m_2则挂在圆柱体的两侧，如题6图所示. 设R＝0.20m，r＝0.10m，m＝4 kg，M＝10 kg，$m_1 = m_2$＝2 kg，且开始时m_1，m_2离地均为h＝2m. 求：

(1)柱体转动时的角加速度；

(2)两侧细绳的张力.

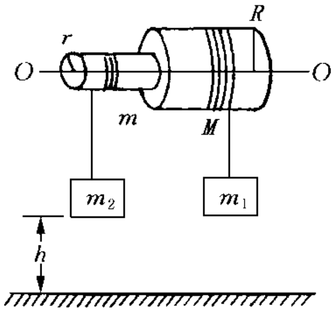
解：设 a_1，a_2 和 α 分别为 m_1，m_2 和柱体的加速度及角加速度，方向如图(如图 b).

(1) m_1，m_2 和柱体的运动方程如下：

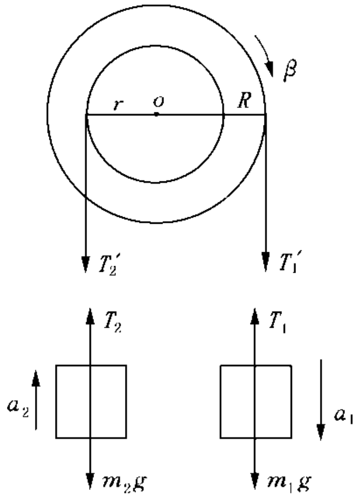
$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad ①$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \qquad ②$$

$$T_1' R - T_2' r = J\alpha \qquad ③$$



题 6(a)图



题 6(b)图

式中 $T_1' = T_1, T_2' = T_2, a_2 = r\alpha, a_1 = R\alpha$

而 $$J = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

由上式求得

$$\alpha = \frac{Rm_1 - rm_2}{J + m_1R^2 + m_2r^2} g$$
$$= \frac{0.2\times 2 - 0.1\times 2}{\frac{1}{2}\times 10\times 0.20^2 + \frac{1}{2}\times 4\times 0.10^2 + 2\times 0.20^2 + 2\times 0.10^2}\times 9.8$$
$$= 6.13\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

(2) 由①式

$$T_2 = m_2 r\alpha + m_2 g = 2\times 0.10\times 6.13 + 2\times 9.8 = 20.8\ \mathrm{N}$$

由②式

$$T_1 = m_1 g - m_1 R\alpha = 2\times 9.8 - 2\times 0.2.\times 6.13 = 17.1\ \mathrm{N}$$

例 7 计算题7图所示系统中物体的加速度.设滑轮为质量均匀分布的圆柱体，其质量为M，半径为r，在绳与轮缘的摩擦力作用下旋转，忽略桌面与物体间的摩擦，设m_1＝50kg，m_2＝200 kg,M＝15 kg, r＝0.1 m

解：分别以m_1，m_2滑轮为研究对象，受力图如图(b)所示．对m_1，m_2运用牛顿定律，有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \quad ①$$

$$T_1 = m_1 a \quad ②$$

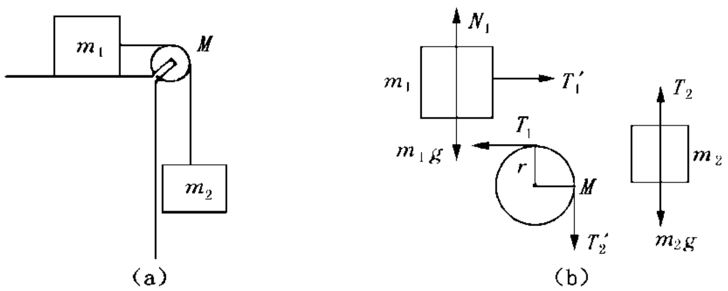
对滑轮运用转动定律，有

$$T_2 r - T_1 r = (\frac{1}{2} M r^2)\alpha \quad ③$$

又，$$a = r\alpha \quad ④$$

联立以上 4 个方程，得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = \frac{200 \times 9.8}{5 + 200 + \frac{15}{2}} = 7.6 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

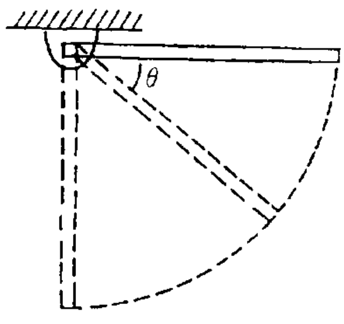


题 7(a)图　　　　　　题 7(b)图

例 8 如题8图所示，一匀质细杆质量为m，长为l，可绕过一端O的水平轴自由转动，杆于水平位置由静止开始摆下．求：

(1)初始时刻的角加速度；

(2)杆转过θ角时的角速度.



题 8 图

解：(1)由转动定律，有

$$mg\frac{1}{2}l=(\frac{1}{3}ml^2)\alpha$$

$$\therefore \qquad \alpha=\frac{3g}{2l}$$

(2)由机械能守恒定律，有

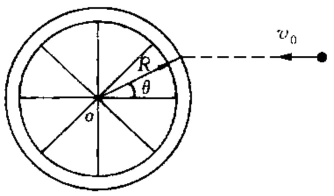
$$mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

$$\therefore \qquad \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

例 9 一质量为m、半径为R的自行车轮，假定质量均匀分布在轮缘上，可绕轴自由转动．另一质量为m_0的子弹以速度v_0射入轮缘(如题9图所示方向)．

(1)开始时轮是静止的，在质点打入后的角速度为何值?

(2)用m，m_0和θ22表示系统(包括轮和质点)最后动能和初始动能之比．



题 9 图

解：(1)射入的过程对O轴的角动量守恒

$$R\sin\theta m_0v_0=(m+m_0)R^2\omega$$

$$\therefore \qquad \omega=\frac{m_0v_0\sin\theta}{(m+m_0)R}$$

(2) $$\frac{E_k}{E_{k_0}}=\frac{\frac{1}{2}[(m+m_0)R^2][\frac{m_0v_0\sin\theta}{(m+m_0)R}]^2}{\frac{1}{2}m_0v_0^2}=\frac{m_0\sin^2\theta}{m+m_0}$$

作业：9、11、15、16