第 10 讲 刚体定轴转动的动能定理　角动量定理

教学要求

理解刚体的转动动能，理解刚体的角动量。

掌握动能定理及计算。掌握角动量定理。

重点与难点

重点：动能定理、角动量定理。

难点：角动量的计算。

3.3　刚体定轴转动的动能定理

3.3.1 刚体定轴转动的转动动能

刚体绕定轴转动时的动能，称为转动动能。设刚体中第 i 个质点的质量为 m_i,作圆周运动的半径为 r_i,速率为 υ_i,角速度为 ω,则该质点的动能

$$\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2=\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

整个刚体的动能

$$E_k=\frac{1}{2}(\sum_i m_ir_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (3\text{-}14)$$

上式表明：**刚体定轴转动的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度平方的乘积的一半。**

注意　刚体定轴转动的动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$ 与质点的动能 $E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2$ 在形式上虽然是相似的，但公式中的 J 是刚体对转轴的转动惯量，而不是对过质心的轴的转动惯量。

3.3.2　刚体定轴转动中力矩的功

如图 3-15，刚体作定轴转动，设作用在刚体上点 P 的力为 $\vec{F}$，$\vec{F}$ 位于转动平面内，若刚体在力 $\vec{F}$ 的作用下有角位移 $\mathrm{d}\theta$，力的作用点的位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，$|\mathrm{d}\vec{r}|=r\mathrm{d}\theta$，$\vec{F}$ 在该位移上做的功

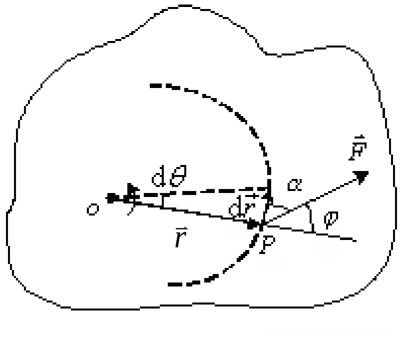


图 3－15 力矩做功

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F\cos\alpha\cdot r\mathrm{d}\theta=Fr\sin\varphi\mathrm{d}\theta=M\mathrm{d}\theta$$

即 $$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta \qquad (3\text{-}15)$$

式（3-15）说明：**作用在定轴转动刚体上力 $\vec{F}$ 的元功 $\mathrm{d}W$，等于该力对转轴的力矩 M 与刚体角位移 $\mathrm{d}\theta$ 的乘积**，这个元功也称为**力矩的元功**。

如果刚体从 θ_0 转到 θ，则这一过程中力矩所作的功

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M\mathrm{d}\theta \qquad (3\text{–}16)$$

若力矩 M 为常量, 则上式可以进一步写成

$$W = M(\theta - \theta_0) \qquad (3\text{–}17)$$

讨论 1　如果有多个外力作用于刚体, 式（3–16）和式（3–17）中的 M 应为诸外力对转轴的合力矩 $\sum\limits_i M_i$ 。

2 力矩的功实质上仍是力做的功，只不过对于刚体转动的情况，力的功可以用力矩和角位移的乘积来表示。

力矩的功率是

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \qquad (3\text{–}18)$$

当输出功率一定时，力矩与角速度成反比。

例 3–10 如图 3–16，长为 l 不计质量的细杆两端各牢固地连结质量为 m 的小球，整个系统可绕过 O 点并垂直于杆的水平轴无摩擦地转动。求系统在重力的作用下从水平位置静止释放到与水平位置成 θ 角的过程中重力矩所做的功。

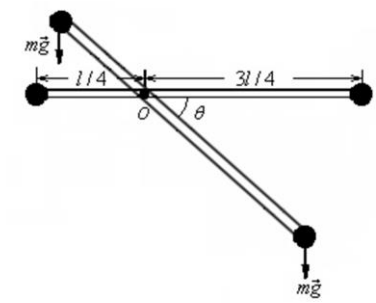


图 3–16　例 3–10 图

解 系统在偏离水平位置 θ 角的位置时，左边小球所受的重力产生的力矩 $M_1 = mg\dfrac{l}{4}\cos\theta$，方向逆时针；右边小球所受的重力产生的力矩 $M_2 = mg\dfrac{3l}{4}\cos\theta$，方向顺时针，合力矩 $M = M_2 - M_1 = mg\dfrac{l}{2}\cos\theta$，方向顺时针。

设系统在此时继续顺时针转动微小角位移 $\mathrm{d}\theta$，则合力矩 M 做的元功

$$\mathrm{d}W = M\cdot\mathrm{d}\theta = mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

在整个过程中重力矩所做的功

$$W = \int\mathrm{d}W = \int_0^{\theta} mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

3.3.3　刚体定轴转动的动能定理

在刚体定轴转动定律$M=J\alpha$中,对α作变换

$$M=J\alpha=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=J\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

即
$$M\mathrm{d}\theta=J\omega\mathrm{d}\omega$$

若刚体在外力矩作用下，角位置从θ_0变到θ，角速度从ω_0变到ω,则

$$\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_0}^{\omega}J\omega\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad (3\text{-}19)$$

由式(3-19)可知,等式左边是外力矩对刚体做的功。式(3-19)表明：**刚体定轴转动时，合外力矩的功等于刚体转动动能增量**，这就是**刚体定轴转动的动能定理**。

注意　定轴转动刚体中所有内力矩的总功为零,计算力矩做功时只需考虑外力矩做的功。原因在于任何一对相互作用的内力大小相等、方向相反，相对于转轴的力臂相同，从而力矩大小相等，方向相反，同时刚体内任一点的角位移也相等，所以内力矩的功为零。实质上，刚体作为特殊的质点系，质点间的相对位置不变，所以内力不做功。

例 3-11　如图 3-17 所示，一根质量为 m，长为l的均匀细棒，可绕固定点 O 在竖直平面内转动.今使棒从水平位置开始自由下摆，求棒摆到与水平位置成 30° 角时中心点 C 和端点 A 的速度.

解　棒受力如图

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$W_G=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{mg}\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{l}{4}mg=-mg(h_{c末}-h_{c初})$$

$$\because W_G=\frac{l}{4}mg, J=\frac{1}{3}ml^2 \qquad \therefore \omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

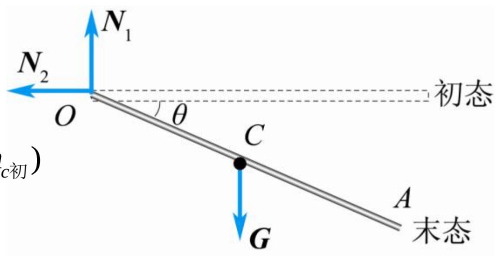


图 3-17　例 3-11 图

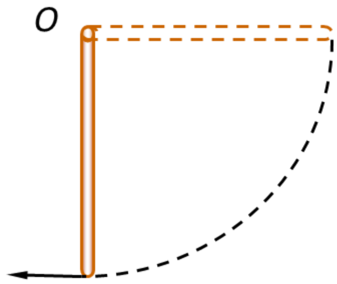
则中心点 C 和端点 A 的速度分别为

$$v_c=\omega\frac{l}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{6gl}$$

$$v_A=\omega l=\frac{1}{2}\sqrt{6gl}$$

课堂训练：均质杆的质量为 m，长为l,一端为光滑的支点.最初处于水平位置，释放后杆向下摆动，如图所示.求杆在图示的竖直位置时，其下端点的线速度 v.

解：由机械能守恒得



$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J=\frac{1}{3}ml^2 \qquad v=\omega l$$

联立得 $$v=\sqrt{3gl}$$

3. 4 刚体定轴转动的角动量定理 角动量守恒定律

动量定理揭示了质点（系）动量变化与外力的关系；质心运动定理揭示了质心运动与外力的关系，两个定理描述了质点（系）平动的特征，但不是质点（系）机械运动的全貌。例如，质量均匀分布的圆盘绕过盘心且垂直于盘面的轴转动时，无论怎样转动，动量恒为零，显然，描述这种运动状态需要引进新的物理量。角动量是描述物体转动状态的基本物理量。角动量的概念与动量、能量的概念一样，也是物理学中的重要基本概念，大到天体，小到电子、质子等微观粒子，对它们的运动描述和研究都经常用到这个物理量。

3.4.1 角动量 质点的角动量定理及角动量守恒定律

1 质点的角动量

与质点运动时的动量类似，角动量是物体“转动运动量”的量度，是与物体的一定转动状态相联系的物理量。这里先引入运动质点对某一固定点的角动量。

如图 3-18 所示，设质点的动量为 $\vec{p}$，**对 O 点的位矢为 $\vec{r}$。定义 质点对 O 点的角动量**为**质点相对于 O 的位矢 $\vec{r}$ 与质点的动量 $\vec{p}$ 的矢量积，**用符号 $\vec{L}$ 表示，即

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \tag{3-20}$$

角动量是矢量，由矢积的定义可知，角动量 $\vec{L}$ 的方向垂直于由动量 $\vec{p}$ 与作用点的位矢 $\vec{r}$ 确定的平面，指向可由 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 的方向按右手螺旋法则确定。设质点的动量 $\vec{p}$ 与位矢 $\vec{r}$ 间的夹角为 θ，则角动量 $\vec{L}$ 的大小为

$$L = rp\sin\theta = rm\upsilon\sin\theta \qquad (3\text{-}21)$$

当质点作圆周运动时，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，这时质点对圆心O点的角动量大小为

$$L = rp = rm\upsilon = mr^2\omega$$

考虑到$\vec{r}\times\vec{p}$的方向与$\vec{\omega}$的方向一致，所以角动量的矢量形式为

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

如果质点做匀速圆周运动，即$\vec{\omega}$不变，则质点的角动量保持不变，但动量则是各点不同的。而且要注意的是，在作匀速圆周运动的情况下，所受的向心力是恒指向圆心的。

由定义式（3-20）可知，质点的角动量与质点对固定点O的矢径有关，同一质点对不同的固定点的位矢不同，因而角动量也不同。因此，在讲质点的角动量时，必须指明是对哪一给定点而言的。

由定义式（3-20）容易推出，在直角坐标系中，角动量$\vec{L}$在x、y和z轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \qquad (3\text{-}22)$$

在国际单位制中，角动量的单位为千克·米^2/秒(kg·m^2/s)。

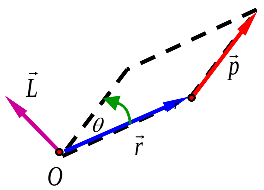


图 3-18 质点对O点的角动量

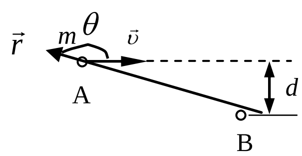


图 3-19 例 3-12 图

例 3-12 质量为m、速率为υ的A粒子以**瞄准距离**d射向B粒子（所谓瞄准距离即B粒子到A粒子速度方向线的垂直距离），如图 3-19 所示。试求A粒子对B粒子的角动量的大小和方向。

解 A粒子对B粒子的角动量的大小为

$$L = rm\upsilon\sin\theta = m\upsilon d$$

由粒子A的位矢$\vec{r}$、速度$\vec{\upsilon}$的方向，根据右手螺旋关系，可判断出A粒子对B粒子的角动量的方向垂直于纸面向里。

2 质点的角动量定理

将质点角动量的定义式（3-20）两边对t求导数得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

由于$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{\upsilon}\times\left(m\vec{\upsilon}\right)=0$， $\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}_o\left(\vec{F}\right)$,得

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{3-23}$$

式（3-23）表明，**质点所受合力对O点的力矩等于质点对O点的角动量的时间变化率**。这就是质点角动量定理的微分形式。其积分形式为式（3-24）

将式（3-23）写成 $\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$，两边积分有

$$\int_{t_0}^{t}\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0 \tag{3-24}$$

式（3-24）中$\vec{L}_0$和$\vec{L}$分别为质点在时刻t_0和t对参考点O的角动量。

定义 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}_0(\vec{F})\mathrm{d}t$为质点所受合力在时间间隔$t-t_0$内对参考点$O$的**冲量矩**，因此，式（3-24）的物理意义是：**质点所受合力对O点的冲量矩等于质点对O点的角动量的增量。**

说明（1） 式（3-23）与牛顿第二定律$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$在形式上是相似的，即$\vec{M}_0(\vec{F})$对应着$\vec{F}$，$\vec{L}$对应着$\vec{p}$，它反映了力矩是角动量变化的原因。

（2） 质点的角动量定理是一个矢量关系，具体应用时常用直角坐标系中的分量形式。

3 质点角动量守恒定律

由式(3-23)可以看出，若质点所受合力矩为零，即$\vec{M}=0$，则有

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}=\text{常矢量} \tag{3-25}$$

上式表明，**当质点所受合力对O点的力矩等于零，那么质点对O点的角动量保持不变，**此即**质点的角动量守恒定律**。

说明 **（1）** 质点角动量守恒的条件是$\vec{M}=0$，通常有两种情况：

1） $\vec{F}=0$,即质点所受的合外力为零。如质点作匀速直线运动，它对任意定点的角动量为常矢量。

2）合力不为零，但合力矩为零。最常见的是**有心力**的情况。即**合力$\vec{F}$通过参考点O，**

致使合力矩为零。如（Ⅰ）质点作匀速圆周运动时，作用于质点的合力都通过圆心，其力矩为零，故质点对圆心的角动量是守恒的。（Ⅱ）太阳系中行星运动的轨道为椭圆，太阳位于两焦点之一，太阳作用于行星的引力是指向太阳的有心力，如以太阳为参考点O,则行星的角动量是守恒的。（Ⅲ）当带电粒子入射到质量较大的原子核附近发生碰撞时，这时粒子所受的原子核的库仑力始终通过原子核的中心（即力心），所以微观粒子在该碰撞过程中对该力心的角动量是守恒的。

（2） 外力矩的矢量和为零，此时合外力可不为零，亦即动量未必守恒。

（3） 力矩与角动量都是对惯性系中某一固定参考点而言的，所选取的参考点不同，力矩及角动量的大小、方向也不同。因此，对某一参考点的角动量守恒时，对另一参考点的角动量未必守恒。

例 3-13　如图 3-22，在光滑的水平桌面上，放有质量为 M 的木块，木块与一弹簧相连，弹簧的另一端固定在 O 点，弹簧的劲度系数为 k，设有一质量为 m 的子弹以初速 v_0 垂直于 OA 射向 M 并嵌在木块内. 弹簧原长 l_0，子弹击中木块后，木块 M 运动到 B 点时刻，弹簧长度变为 l，此时 OB 垂直于 OA，求在 B 点时，木块的运动速度 $\vec{v}_2$ 。

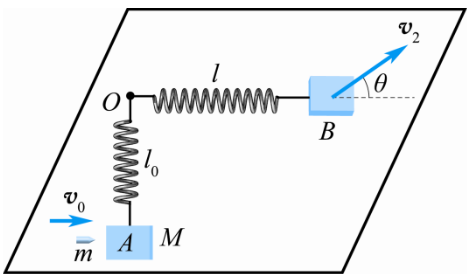


图 3-22 例 3-13 图

解　击中瞬间，在水平面内，子弹与木块组成的系统沿 v_0 方向动量守恒，即有

$$mv_0=(m+M)v_1$$

在由 $A\to B$ 的过程中，子弹、木块系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}(\mathrm{m}+\mathrm{M})v^2{}_1=\frac{1}{2}(\mathrm{m}+\mathrm{M})v^2{}_2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

在由 $A\to B$ 的过程中木块在水平面内只受指向 O 点的弹性有心力，故木块对 O 点的角动量守恒，设 $\vec{v}_2$ 与 OB 方向成 θ 角，则有

$$l_0(\mathrm{m}+\mathrm{M})v_1=l(\mathrm{m}+\mathrm{M})v_2\sin\theta$$

$$v_2=\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2-\frac{k(l-l_0)^2}{m+M}} \qquad \theta=\arcsin\frac{l_0 m v_0}{l\sqrt{m^2v_0^2-k(l-l_0)^2(m+M)}}$$

例 3-14　如图 3-23，一质点 m 被一长为 l 的轻线悬于天花板上的 B 点，质点 m 在水平面内作匀角速 ω 的圆周运动，设圆轨道半径为 r_0. 试计算(1)质点 m 对圆心 O 和悬点 B 的角动量 $\vec{L}_0$ 和 $\vec{L}_B$；(2)作用在质点 m 上的重力 mg 和张力 T 对圆心 O 和悬点 B 的力矩 $\vec{M}_0$ 和 $\vec{M}_B$；(3)试讨论 m 对 O 点或 B 点的角动量是否守恒(如图所示).

解　(1) 在图(a)中由圆心 O 点向质量 m 引矢量 $\vec{r}_0$，则

$$\overrightarrow{L_0}=\vec{r}_0\times m\vec{v}$$

其方向垂直于轨道平面沿 OB 方向向上，因为 $\vec{r}_0\perp m\vec{v}$，故

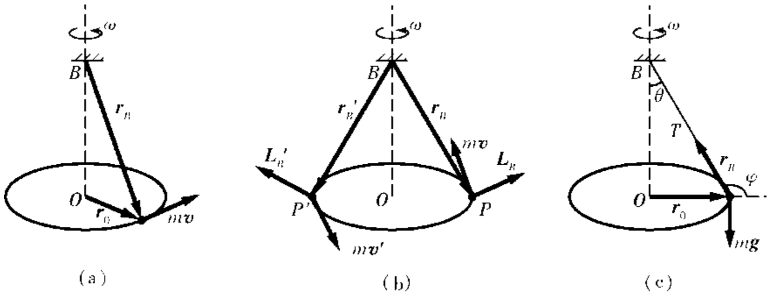


图 3-23　例 3-14 图

$$L_0=r_0mv=mr_0^2\omega$$

即圆锥摆对圆心 O 点的角动量 $\vec{L}_0$ 是个沿 OB 向上的大小和方向都不变的恒矢量。

在图(b)中，由悬点 B 向在某位置 P 处的质点 m 引矢径 $\vec{r}_B$，则

$$\vec{L}_B=\vec{r}_B\times m\vec{v}$$

即 $\vec{L}_B$ 的方向垂直于 $\vec{r}_B$ 与 $m\vec{v}$ 所组成的平面. 显然，质点 m 在不同的位置处，例如在 p′ 点处，其矢径 $\vec{r}_B'$ 和动量 $m\vec{v}'$ 各不相同，因此，其矢积 $\vec{L}_B'$ 也不相同. 即 $\vec{L}_B$ 的方向是不断地变化着的. 这时 $\vec{L}_B$ 的大小为

$$L_B=r_Bmv\sin\frac{\pi}{2}=lmv=mlr_0\omega$$

(2) 如图(c)，质点 m 所在位置对于圆心 O，张力 T 的力矩为

$$\overrightarrow{M_{T0}}=\vec{r}_0\times\vec{T}$$

其方向垂直于纸面向外，大小为

$$M_{T_0}=r_0T\sin\varphi=r_0T\cos\theta$$

因在竖直方向有 $T\cos\theta = mg$，所以 $M_{T_0} = r_0 mg$

此时重力对圆心 O 的力矩为 $\vec{M}_{mgo} = \vec{r}_0 \times m\vec{g}$

其方向垂直于纸面向里. 因 mg 始终垂直于轨道平面，所以 $\vec{r}_0 \perp m\vec{g}$，故 $\vec{M}_{mgo}$ 的大小为

$$M_{mg_0} = r_0 mg$$

由上面计算可以得出，作用在质点 m 上的张力 T，重力 mg 对圆心 O 的合力矩为

$$\overrightarrow{M}_0 = \overrightarrow{M}_{T0} + \overrightarrow{M}_{mg0} = 0$$

同样，如图(c)质点所在位置，对于悬点 B，张力 T 因与 $\vec{r}_B$ 始终共线，故 T 对 B 点的力矩为零. 而重力 mg 对 B 点的力矩为 $\vec{M}_{mgB} = \vec{r}_B \times m\vec{g}$

其方向始终垂直于 $\vec{r}_B$ 与重力作用线 mg 所组成的平面. 由于 $\vec{r}_B$ 的方向在不断地变化，所以 $\vec{M}_{mgB}$ 的方向也在不断地变化，如图(c)所在位置，$\vec{M}_{mgB}$ 的方向垂直于纸面向里.

(3) 由(2)中的讨论可知，重力 mg 和张力 T 对 O 点的合力矩为零(实际上 mg 与 T 的合力构成了 m 作圆周运动的向心力，为有心力，其对 O 点合力矩必定为零)，所以质点 m 对 O 点的角动量守恒，这与(1)中讨论一致.

同样，由(2)中讨论知，因 mg 对 B 点的力矩方向始终变化，即对 B 点的力矩不为零，故质点 m 对 B 点的角动量不守恒. 这与前面结果也是一致的.

3.4.2 刚体对轴的角动量　刚体定轴转动的角动量定理

1 刚体对轴的角动量

如图3-24所示,当刚体以角速度 ω 转动时,刚体上每个质点都在各自的转动平面内以相同的角速度 ω 绕 Oz 轴作圆周运动，由式（3-21）知：其中任一质点 m_i 对转轴的角动量

$$L_{iz} = r_i m_i \upsilon_i = m_i r_i^2 \omega$$

r_i 为 m_i 到转轴的距离，刚体对转轴 Oz 的角动量 L_z 为

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)\omega$$

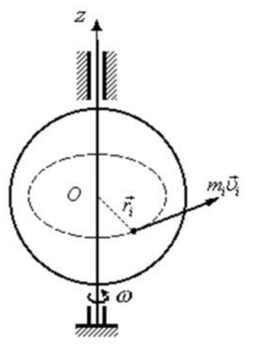


图 3-24 刚体对轴的角动量

由转动惯量的定义,上式即为

$$L_z = J\omega \qquad (3\text{-}26)$$

式(3-26)表明:**刚体对定轴的角动量等于刚体对定轴的转动惯量与角速度的乘积**。

注意 （1） 角动量L_z是代数量,其正负与ω相同，按右手螺旋法则决定：使右手螺旋转动的方向和刚体的转向相一致，若螺旋前进的方向与Oz轴方向一致，则$\omega>0$，$L_z>0$；否则$\omega<0$，$L_z<0$。

（2） 任何物体绕Oz轴作定轴转动，则其角动量仍可写成$L_z=J\omega$的形式，只不过物体在转动过程中，转动惯量J可以是变化的。

（3） 将$L_z=J\omega$与$\vec{p}=m\vec{v}$对比可见它们的相似性。这使我们进一步认识到转动惯量J是质点系对转轴的转动惯性大小的量度。

2 刚体定轴转动的角动量定理

根据转动定律，且在牛顿力学中，对于给定的转动轴，刚体的转动惯量为常数，于是有

$$M=J\alpha=J\frac{d\omega}{dt}=\frac{\mathrm{d}\left(J\omega\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \qquad (3\text{-}27)$$

上式表示，**刚体所受到的对某给定轴的总外力矩等于刚体对此轴的角动量的时间变化率**。这是**刚体定轴转动的角动量定理的微分形式。**

注意 对于刚体，它对给定轴的转动惯量J是保持不变的，因此式（3-27）与式$M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha$的意义完全一样。但式(3-27)的适用范围更为广泛,可以适用于刚体,也可以适用于非刚体,即当绕定轴转动物体的转动惯量J可以变化时，式$M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha$不再适用，但式（3-27）仍成立。

将式（3-27）写成 $M\mathrm{d}t=\mathrm{d}L_z$，两边积分有

$$\int_{t_0}^{t}M\mathrm{d}t=L_z-L_{0z} \qquad (3\text{-}28)$$

式(3-28)中,$\int_{t_0}^{t}M\mathrm{d}t$为是时间间隔$t-t_0$内合外力矩$M$对轴的的**冲量矩，**单位为牛·米·秒$\left(\mathrm{N\cdot m\cdot s}\right)$。$L_{0z}$和$L_z$分别为刚体在时刻$t_0$和$t$对定轴的角动量。上式说明:**刚体所受合外力矩的冲量矩等于在这段时间间隔内的角动量的增量**,这就是**刚体定轴转动的角动量定理的积分形式**。

讨论（1）对于刚体，它对给定轴的转动惯量J是保持不变的，式（3-28）可以写成

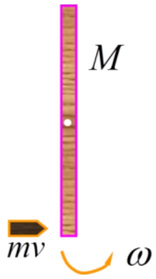
$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$$

上式中，ω_0 和 ω 分别为刚体在时刻 t_0 和 t 的角速度。

（2）如果物体在转动过程中，物体内各质点相对于转轴的位置发生了变化，那么物体的转动惯量 J 也必然随时间变化。时间间隔 $t-t_0$ 内，转动惯量由 J_0 变为 J，则式（3-28）可写成

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}t = J\omega - J_0\omega_0$$

课堂训练： 杆质量M，长l，绕中点转动，$J=\frac{M}{12}l^2$，开始竖直静止。子弹m，初速水平v，射入下端，问$\omega=?$



解：碰撞前角动量　$L_1 = mv\frac{l}{2}$　　(1)

碰撞后角动量　$L_2 = J\omega$　　(2)

且　$J = J_m + J_M = m(\frac{l}{2})^2 + \frac{M}{12}l^2$　　(3)

碰撞过程中，M的重力矩为零，m的重力矩忽略不计。由角动量守恒，得

$$\omega = \frac{6mv}{(3m+M)l}$$

问：i）碰撞过程中，水平动量是否守恒？为什么？

碰撞前水平动量　$P_{m_1} = mv$　$P_{M_1} = 0$

碰撞后水平动量　$P_{m_2} = m(\frac{l}{2})\omega = \frac{3m^2v}{3m+M}$　$P_{M_2} = 0$

$P_{m_2} < P_{m_1}$　(动量减少）

这是因为轴对杆有一作用力！（也是一冲力，被动约束力）。

ii）碰撞过程中，机械能是否守恒？

答：不守恒！因为是完全非弹性碰撞，产生永久形变。

作业：8、10、12、13、14、17