第 9 讲 刚体定轴转动的描述 力矩　刚体定轴转动的转动定律

教学要求

了解刚体、定轴转动的定义，角速度矢量的定义。理解力矩定义、转动惯量定义。掌握刚体定轴转动定律及应用。

重点与难点

重点：刚体定轴转动定律及应用。

难点：力矩的计算。

3.1　刚体　刚体定轴转动的描述

3.1.1　刚体的引入

前两章主要讲述了质点的力学问题，即物体的形状和大小在所考虑问题中可忽略而把物体看作是质点时所遵循的规律。然而，当讨论地球的自转、电机转子的转动、车轮的滚动、船舶在水中的颠簸和桥梁或起重机的平衡等问题时，物体的形状和大小往往起重要作用，因而必须考虑它们的形状和大小，以及在力和运动影响下形状和大小的变化；但是，把形状和大小以及它们的变化都考虑在内，会使问题变得相当复杂。值得庆幸的是，在很多情况中，由于物体形变都很小，对研究结果影响甚微，因而可将它们忽略不计。比如，将一长方形物体水平放置，如图 3-1 所示，在其左端 A 以水平力 $\boldsymbol{F}$ 推之，则该物体获得水平加速度。这件事看起来似乎平淡无奇，但我们要问：力 $\boldsymbol{F}$ 只作用在物体的 A 部分，B，C，…各部分，乃至其最右端 Z，并没有受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，为何也获得了同样的加速度呢？这当然是力从 A 到 B，B 到 C，…一步步传下去，一直传到 Z。传递推力的机制是物体的弹性：开始时力 $\boldsymbol{F}$ 使 A 加速，而 B 未动，于是 A、B 之间产生压缩而互推；这推力使 B 加速，而 C 未动，于是 B、C 之间产生压缩而互推…以此类推，把推力一直传到最右端 Z。由此可见，这是一个弹性力的传递过程，在这过程中没有物体的形变是不行的。但是，该过程物体的弹性形变小得可以忽略，这样，我们就得到实际物体的另外一个理想模型——刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体. （任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）。

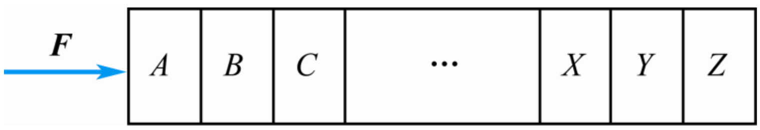


图 3-1 力的传播

研究刚体力学时，通常把刚体分成许多部分，每一部分都小到可看作质点，叫作刚体的

质元。由于刚体不变形，各质元间的距离不变。各质元间的距离保持不变的质点系叫作不变质点系。把刚体看作不变质点系并运用已知的质点系的运动规律去研究，这是刚体力学的基本方法。

3.1.2　刚体的基本运动

刚体最基本的运动形式：平动、转动。

1 刚体的平动

若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线，这样的运动称为刚体的平动。显然，刚体中各质元均具有相同的速度和加速度，此时，刚体中任一质元的运动可表示整个刚体的运动。因此，平动的刚体可当成一个质点来处理。即

刚体平动 $\Rightarrow$ 质点运动

2 刚体的转动

如果刚体运动时，若刚体中各质元都绕同一直线做圆周运动，称为刚体的转动。转动又分定轴转动和非定轴转动 。若转轴的方向或位置随时间变化，这样的运动称为刚体的非定轴转动，该转轴称为转动瞬轴；若转轴固定不动，即既不改变方向又不发生平移，这样的转动称为刚体的定轴转动。本章主要介绍刚体定轴转动的一些基本规律。

3.1.3　刚体定轴转动的描述

为了描述刚体的定轴转动，可定义：垂直于固定轴的平面为转动平面。显然，转动平面不止一个，而有无数个。如果以某转动平面与转动轴的交点为原点，则该转动平面上的所有质元都绕着这个原点作圆周运动。下面就讨论怎样来描述刚体的定轴转动。

1 角位移、角速度和角加速度

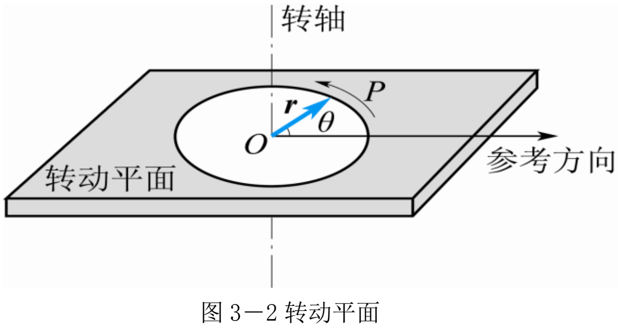


图 3－2 转动平面

刚体定轴转动的基本特征是，轴上各点都保持不动，轴外所有各点在同一时间间隔内转过的角度都一样。所以我们可以采用类似质点作圆周运动时的角位移、角速度和角加速度的定义方法来

定义绕定轴转动刚体的角位移、角速度和角加速度。

在刚体上任取一个转动平面，以该转动平面与转动轴的交点为原点，在该平面内作一射线作为参考方向（或称极轴）如图 3－2 所示，转动平面上任一质元对原点的位矢$\vec{r}$与极轴的夹角称为角位置θ，刚体在一段时间内转过的角度（即末时刻与初始时刻的角位置之差）$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$称为角位移。

在时刻t到$t+\Delta t$时间内的角位移$\Delta\theta$与Δt之比称为刚体的平均角速度，用$\bar{\omega}$表示：

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

当$\Delta t\to 0$时，平均角速度的极限称为瞬时角速度，简称角速度，用ω表示：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad （3－1）$$

刚体的定轴转动有两种不同的转动方向，当我们顺着转轴观察时，刚体可以按顺时针方向转动，也可以按逆时针方向转动，如果把一种转向的角速度取为正，另一种转向的角速度取为负，则角速度的大小反映了定轴转动的快慢，角速度的正负描写了定轴转动的方向。角速度的单位是弧度每秒（rad/s）。

在Δt时间内，角速度的改变量Δω与Δt之比称为该段时间内刚体的平均角加速度，用$\bar{\alpha}$表示：$\bar{\alpha}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$，当$\Delta t\to 0$时，平均角加速度的极限称为瞬时角加速度，简称角加速度，用α表示：

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt} \qquad （3－2）$$

角加速度的单位是弧度每二次方秒（rad/s^2）。

由以上讨论可知，刚体的定轴转动与质点的直线运动相似，只要在描写质点直线运动各物理量（位移、速度、加速度）前加一个“角”字，就成了描述刚体定轴转动的各相应物理量（角位移、角速度、角加速度），两者的运动学关系也完全相似：

定轴转动	直线运动
$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$，	$v=\dfrac{dx}{dt}$；

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}\text{，}\qquad\qquad a=\frac{dv}{dt}\text{；}$$

$$\omega-\omega_0=\int_0^t\alpha dt\text{，}\qquad\qquad v-v_0=\int_0^t adt\text{；}$$

$$\theta-\theta_0=\int_0^t\omega dt\text{，}\qquad\qquad x-x_0=\int_0^t vdt\text{。}$$

2 角量与线量的关系

当刚体绕固定轴转动时，尽管刚体上各质元的角位移、角速度、角加速度均相同，但由于各质元作圆周运动的半径不一定相同，因此各质元的速度和加速度也不一定相同。

若刚体上某质元 i 到转轴的距离为 r_i. 则该质元的线速度为

$$v_i=\omega r_i$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{i\tau}=\alpha r_i\qquad\qquad a_{in}=\omega^2 r_i$$

由此可见，尽管刚体是一个复杂的质点系，但引入角量后，刚体定轴转动的描述就显得十分简单。刚体上各质元的角量(即角位移、角速度、角加速度)相同，而各质元的线量(即线位移、线速度、线加速度)大小与质元到转轴的距离成正比。

3. 2　力矩　刚体定轴转动的转动定律

力是使物体平动状态发生改变的原因，而力矩是使物体转动状态发生改变的原因。本节先介绍力矩的概念，然后讨论刚体作定轴转动的动力学关系。

3.2.1　力矩

力矩可分为力对点的力矩和力对轴的力矩。因此，我们先讨论力对点的力矩。

力对 *O* 点的力矩

如图3-3,**力对 *O* 点的力矩**定义为力 $\vec{F}$ 的作用点 P 相对于 O 的位矢 $\vec{r}$ 与力 $\vec{F}$ 的矢量积，用符号 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 表示，即

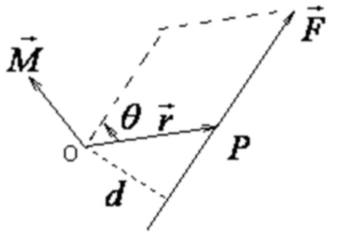
$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}\qquad\qquad (3\text{-}3)$$

说明 1 由矢量积的性质可知,力矩是矢量。**(1)** 力矩的方向垂直于由力 $\vec{F}$ 与作用点的位矢 $\vec{r}$ 确定的平面，指向可由 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 的方向按右手螺旋法则确定：右手伸直姆指，其余四指自 $\vec{r}$ 的方向沿小于 π 的角转向 $\vec{F}$ 的方向时，姆指所指的方向就是力矩的方向[如图 3-3 (b)]。

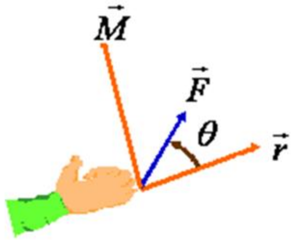
(2) 设力 $\vec{F}$ 与位矢 $\vec{r}$ 间的夹角为 θ，则力矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 的大小为

$$M_O(\vec{F})=rF\sin\theta\qquad\qquad (3\text{-}4)$$

即等于由 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 构成平行四边形的面积[如图 3-3 (a)]。在式（3-3）中，$d = r\sin\theta$ 是 O 点到力的作用线的垂直距离[如图 3-3 (a)]，称为力对 O 点的**力臂**。因此，力矩的大小可以表示为力的大小与力臂的积。



(a) 力对 0 点的力矩



(b)矢量的矢积

图 3-3　力对 O 点的力矩

2 对于质点系，内力是以作用力和反作用力的形式成对出现的，任一对内力大小相等，方向相反, 而它们的作用点对 O 点的位矢相等，所以一对内力矩的大小相等、方向相反，它们的矢量和为零。由此可知,质点系的所有内力对任一参考点的力矩的矢量和为零。

3 力矩在直角坐标系中的计算

设力 $\vec{F}$ 与其作用点相对于参考点 O 的位矢 $\vec{r}$ 在直角坐标系中可表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \qquad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

根据式(3-3)有

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \qquad (3\text{-}5)$$

因此，力矩 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 在 x、 y 和 z 轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} [\vec{M}_O(\vec{F})]_x &= yF_z - zF_y \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_y &= zF_x - xF_z \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (3\text{-}6)$$

注意　由上述计算可知，力矩的大小和方向都与参考点 O 的选择有关。因此，在计算力矩时，必须说明参考点。

力矩的单位为牛・米（N·m）。

例 3-1　质量为 1.0 kg 的质点沿着由 $\vec{r} = [2t^3\vec{i} + (t^4 - 3t^3)\vec{j}]$ m 决定的曲线运动，求此质点在 $t = 1.0$ s 时所受的相对于坐标原点 O 的力矩。

解 质点的速度 $$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=6t^2\vec{i}+(4t^3-9t^2)\vec{j}$$

质点的加速度 $$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=12t\vec{i}+6(2t^2-3t)\vec{j}$$

作用于质点的力 $$\vec{F}=m\vec{a}=12t\vec{i}+6(2t^2-3t)\vec{j}$$

在任意时刻,相对于坐标原点 O 质点所受的力矩为

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=(xF_y-yF_x)\vec{k}$$

$$=[2t^3\cdot 6(2t^2-3t)-(t^4-3t^3)\cdot 12t]\vec{k}=1$$

在 $t=1.0\ \mathrm{s}$ 时 $$\vec{M}_O(\vec{F})=12\vec{k}\ \mathrm{N\cdot m}$$

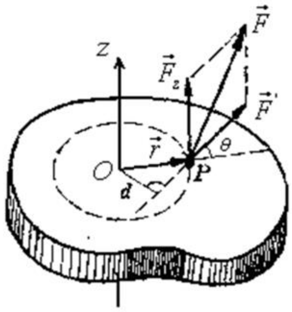


图 3-4 力矩

力对固定转轴的力矩

方向任意的外力 $\vec{F}$ 作用在绕 Oz 轴作定轴转动的刚体的点 P 上，若将力 $\vec{F}$ 分解为两个分力（图 3-4），一个是与转轴平行的分力 $\vec{F}_z$，另一个是位于转动平面内的分力 $\vec{F}'$。显然 $\vec{F}_z$ 对刚体的转动不起作用，起作用的是 $\vec{F}'$，$\vec{F}'$ 对 z 轴的力矩

$$M_z=rF'\sin\theta=F'd \qquad \textbf{(3-7)}$$

式中 θ 是 $\vec{F}'$ 与 $\vec{r}$ 的夹角，力臂 $d=r\sin\theta$ 是 z 轴到 $\vec{F}'$ 作用线的垂直距离。为简化起见，在涉及定轴转动问题时，除非特别说明，都认为力 $\vec{F}$ 在某一转动平面内。

说明 如果刚体同时受几个力的作用，则刚体定轴转动的合力矩等于各分力矩的代数和，即

$$M_z=\sum_i M_{iz} \qquad \textbf{(3-8)}$$

M_{iz} 的正负按右手螺旋法则确定：当它使刚体转动的转向与右手螺旋的转向一致时，螺旋前进的方向如果沿转轴 Oz，则为正；反之为负。

3.2.2 刚体定轴转动的转动定律

实验指出,一个绕定轴转动的刚体,当它所受的对于转轴的合外力矩等于零时,它将保持原有的角速度不变,或保持静止状态,或做匀角速转动，这反映了任何物体都具有转动惯性,就像物体具有平动惯性一样。

实验还指出，一个绕定轴转动的刚体,当它所受的对于转轴的合外力矩M不等于零时，它将获得角加速度α。下面推导α与M的关系式。

图 3-5 表示一个绕固定轴z转动的刚体，在刚体上任取质点i，其质量为m_i，离转轴的距离为r_i，设质点i所受的外力为$\vec{F}_i$，内力为$\vec{f}_i$。

由牛顿第二定律，质点i的运动方程为

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i\vec{a}_i$$

如以F_{it}和f_{it}分别表示$\vec{F}_i$和$\vec{f}_i$在切向的分力,那么质点i在切向的运动方程为

$$F_{it} + f_{it} = m_i a_{it}$$

$a_{it} = r_i\alpha$为质点i的切向加速度,上式变为

$$F_{it} + f_{it} = m_i r_i\alpha$$

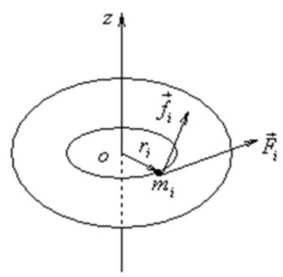


图 3-5 推导刚体定轴转动定律用图

两边乘以r_i,得

$$F_{it}r_i + f_{it}r_i = m_i r_i^2\alpha$$

式中$F_{it}r_i$和$f_{it}r_i$分别是外力$\vec{F}_i$和内力$\vec{f}_i$的切向力的力矩。考虑到法向力F_{in}和f_{in}均通过转轴z，所以其力矩为零。故上式左边也可理解为作用在质点i上的外力矩和内力矩之和。若考虑到所有质点，上式可变为

$$\sum_i F_{it}r_i + \sum_i f_{it}r_i = \left[\sum_i m_i r_i^2\right]\alpha$$

在**问题 3-1** 中已证明,内力矩的和为零,即$\sum_i f_{it}r_i = 0$,故上式为

$$\sum_i F_{it}r_i = \left[\sum_i m_i r_i^2\right]\alpha$$

$\sum_i F_{it}r_i$为刚体内所有质点所受的外力对转轴的力矩的代数和，即**合外力矩**，用M表示，式中的$\sum_i m_i r_i^2$只与刚体的形状、质量分布以及转轴的位置有关，也就是说，它只与绕定轴转动的刚体本身的性质和转轴的位置有关。对于绕定轴转动的刚体，它为一恒量，叫**转动惯量，**用J表示，即

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \textbf{(3-9)}$$

则得

$$M = J\alpha \qquad \textbf{（3-10）}$$

式（3-10）表明：**刚体定轴转动时，它的角加速度α与所受合外力矩M成正比，与转动惯量J成反比。**

此即**刚体定轴转动定律**。

刚体定轴转动定律和牛顿第二定律相比较，形式相似，地位相当。

1. 牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$，式中$\vec{F}$为质点受到的外力；m为质量，为质点平动惯性的量度；$\vec{a}$为力$\vec{F}$所产生的平动效果，改变物体的运动状态，且与$\vec{F}$的方向相同。

2. 刚体定轴转动定律 $M = J\alpha$，式中M为刚体受到的外力矩；J为刚体定轴转动的转动惯量，为刚体转动惯性的量度；α为力矩M所产生的转动效果，改变刚体的转动状态，且与M的方向相同。

3.2.3 转动惯量的计算

1 若刚体是由离散分布的质点组成，则转动惯量J按式（**3-9**）计算；

2 若刚体质量是连续分布的，则转动惯量J按下式计算；

$$J = \int_m r^2 \mathrm{d}m \qquad \textbf{（3-11）}$$

式（3-11）中r为质元$\mathrm{d}m$到转轴的垂直距离，而质元$\mathrm{d}m$的表示方法有三种情况：

（1）刚体是一维线分布的，定义质量线密度$\lambda = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$，则$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x$；

（2）刚体是二维面分布的，定义质量面密度$\sigma = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$，则$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$；

（3）刚体是三维体分布的，定义质量体密度$\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$，则$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$。

3 转动惯量具有可加性，当一个刚体由几部分组成时，可以分别计算各个部分对转轴的转动惯量，然后把结果相加就可以得到整个刚体的转动惯量即

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \cdots + J_n$$

例３-２ 如图３-６，在由不计质量的细杆组成的边长为l的正三角形的顶角上，各固定一个质量为m的小球。求

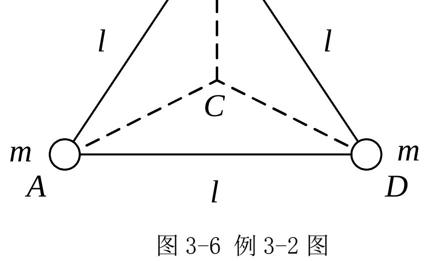


图 3-6 例 3-2 图

（1） 系统对过质心且与三角形平面垂直的轴 C 的转动惯量；（2）系统对过 A 点，且平行于轴 C 的转动惯量。

解 （1） 由式（3-9），得

$$J_c = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2 = m\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 + m\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 + m\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 = ml^2$$

（2） 由式（3-9），得

$$J_A = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2$$

$$= m \cdot 0^2 + ml^2 + ml^2 = 2ml^2$$

例 3-3 已知匀质细杆质量为 m、长为 l。(1) 计算匀质细杆绕中心垂直轴的转动惯量；(2) 计算匀质细杆绕过端点且与杆垂直的轴的转动惯量。

解 （1） 如图 3-7（a）所示，在距 O 点 x 处取长度为 $\mathrm{d}x$ 的质量微元，其质量

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

代入式（3-11），积分限从 $x = -\dfrac{l}{2}$ 到 $x = \dfrac{l}{2}$，即

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}ml^2$$

(2) 如图 3-7 (b) 所示，积分限从 $x = 0$ 到 $x = l$，即

$$J = \int_0^l x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}ml^2$$

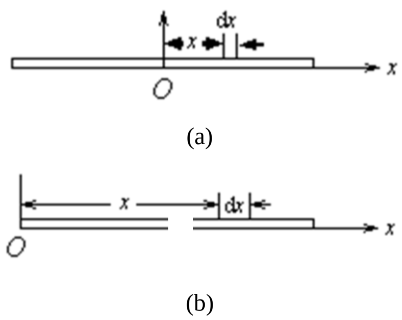


图 3-7 例 3-3 图

例 3-4 计算质量为 m、半径为 R 的匀质细圆环绕中心垂直轴的转动惯量。

解 根据式（3-11），有

$$J = \int R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int \mathrm{d}m = mR^2$$

此题由于匀质细圆环上各质元到转轴的距离处处相同，所以不需要写出质量微元的具体表达式就能计算出结果。

例 3-5 计算质量为 m、半径为 R 的匀质薄圆板绕中心垂直轴的转动惯量。

解 如图 3-8，在距圆心 r 处取宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环面积微元，其面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$$

质量
$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{m}{R^2} 2r\mathrm{d}r$$

代入式（3-11），积分限从 $r = 0$ 到 $r = R$，即

$$J=\int_0^R r^2\frac{2m}{R^2}r\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4}\Bigg|_0^R=\frac{1}{2}mR^2$$

应用下列两个定理，常可简化转动惯量的计算 。

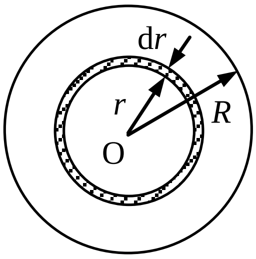


图 3-8 例 3-5 图

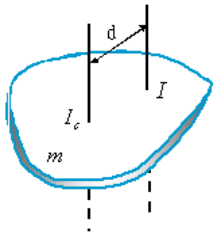


图 3-9 平行轴定理

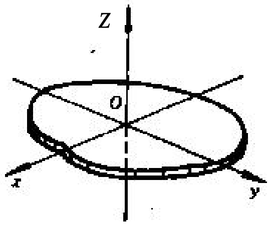


图 3-10 正交轴定理

平行轴定理 若质量 m 的刚体对通过质心的轴的转动惯量为 J_C，若将轴沿任何方向平行移动距离 d （图 3-9），则绕该轴的转动惯量为

$$J=J_c+md^2 \qquad \textbf{(3-12)}$$

正交轴定理 对于质量分布在 Oxy 平面上的薄板刚体，绕 z 轴的转动惯量 J_z 等于绕 x 轴的转动惯量 J_x 与绕 y 轴的转动惯量 J_y 的和（图 3-10），即

$$J_z=J_x+J_y \qquad \textbf{(3-13)}$$

例 3-6 钟摆（图 3 -11）由质量为 m_1 、半径为 R 的匀质薄圆盘和质量为 m_2 、长为 l 的匀质细杆构成。计算其绕过 O 点的垂直轴的转动惯量。

解 应用转动惯量的可加性，匀质细杆绕过 O 点的垂直轴的转动惯量为

$$J_{杆}=\frac{1}{3}m_2l^2$$

由例 3 - 5 的结果，并根据平行轴定理，可求得匀质薄圆盘绕过 O 点的垂直轴的转动惯量为

$$J_{盘}=\frac{1}{2}m_1R^2+m_1(R+l)^2=m_1(\frac{3}{2}R^2+2Rl+l^2)$$

钟摆绕过 O 点的垂直轴的转动惯量为

$$J=J_{盘}+J_{杆}=m_1(\frac{3}{2}R^2+2Rl+l^2)+\frac{1}{3}m_2l^2$$

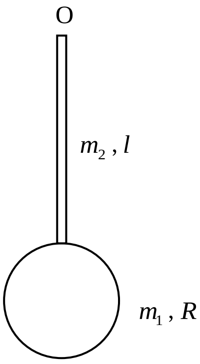


图 3-11　例 3-6 图

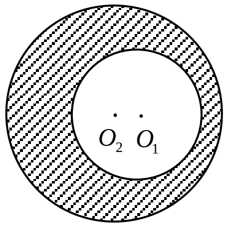
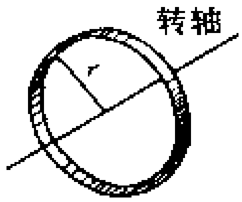
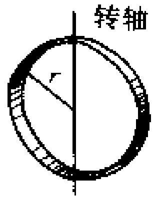
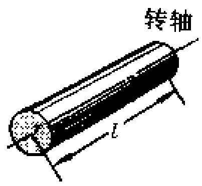
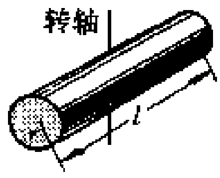
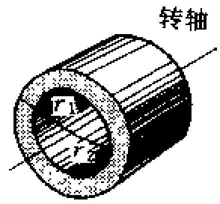
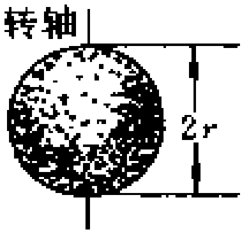
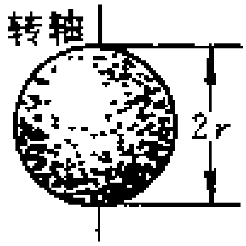


图 3-12　问题 3-3 图

表 3-1 常见规则刚体的转动惯量

圆环	转轴过中心且 与环面垂直	$J = mr^2$ （r 为半径）	
圆环	转轴沿环直径	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆盘	转轴过中心且 和盘面垂直	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆柱体	转轴沿几何轴	$J = \dfrac{mr^2}{2}$ （r 为半径）	
实心圆柱体	过中心且 和几何轴垂直	$J = \dfrac{mr^2}{4} + \dfrac{ml^2}{12}$ （r 为半径，l 为柱长）	

空心圆柱体	转轴 沿几何轴	$J=\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$ （r_1为内半径，r_2为外半径）	
实心圆球	转轴沿直径	$J=\frac{2}{5}mr^2$ （r为半径）	
球壳	转轴沿直径	$J=\frac{2}{3}mr^2$ （r为半径）	

3.2.4　转动定律的应用

应用刚体定轴转动定律解题的步骤可分为以下三步：（1）确定研究对象；（2）对研究对象进行受力分析，并确定外力矩；（3）规定转动正方向，根据转动定律列方程求解，讨论结果。若题中还存在平动运动，还需针对平动对象由牛顿第二定律列出方程，同时列出平动与转动之间的联系方程。

例 3-7　如图 3 -13 所示，质量均为 m 的两物体 A，B. A 放在倾角为 α 的光滑斜面上，通过定滑轮由不可伸长的轻绳与 B 相连. 定滑轮是半径为 R 的圆盘，其质量也为 m. 物体运动时，绳与滑轮无相对滑动. 求绳中张力 T_1 和 T_2 及物体的加速度 a(轮轴光滑)。

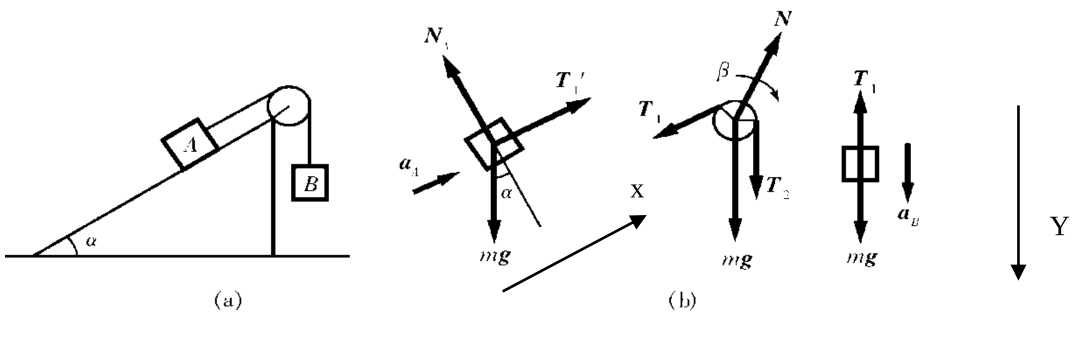


图 3-13 例 3-7 图

解：物体 A，B，定滑轮受力图见图（*b*）. 建立坐标轴见图（*b*）. 对于作平动的物体 A，B，分别由牛顿定律得

$$T_1' - mg\sin\alpha = ma_A \qquad ①$$

$$mg - T_2' = ma_B \qquad ②$$

又 $$T_1' = T_1,\quad T_2' = T_2. \qquad ③$$

对定滑轮，规定垂直纸面指向里为轴的正方向，由转动定律得

$$T_2R - T_1R = J\alpha \qquad ④$$

由于绳不可伸长，所以

$$a_A = a_B = R\alpha \qquad ⑤$$

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

联立式①，②，③，④，⑤得

$$T_1 = \frac{2+3\sin\alpha}{5}mg$$

$$T_2 = \frac{3+2\sin\alpha}{5}mg$$

$$a_A = a_B = \frac{2(1-\sin\alpha)}{5}g$$

例 3-8 如图 3-14 所示，长为 l、质量为 m 的匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相连并绕其无摩擦地转动，求当此杆受到微小扰动在重力作用下由静止开始绕 O 点转动到与竖直方向成 θ 角时的角加速度和角速度。

解 当杆与铅直线成 θ 角时，重力 G 对铰链 O 的力矩大小为 $mg\frac{l}{2}\sin\theta$，方向顺时针。由刚体定轴转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$

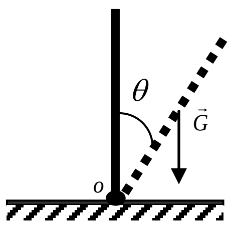


图 3-14 例 3-8 图

代入刚体定轴转动的转动惯量 $J = \frac{1}{3}ml^2$

得 $$\alpha = \frac{\mathrm{mg}\frac{l}{2}\sin\theta}{\frac{\mathrm{m}}{3}l^2} = \frac{3g\sin\theta}{2l}$$

由角加速度定义有 $$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3g\sin\theta}{2l} \qquad (1)$$

而 $$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

式（1）可变为 $$\omega d\omega=\frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$$

对上式积分，并利用初始条件：$t=0$ 时，θ_0=0，ω_0=0，得

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$$

积分后化简得 $$\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l}}$$

例 3-9 转动着的飞轮的转动惯量为 J，在 t=0 时角速度为 ω_0 此后飞轮经历制动过程，阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比，比例系数为 k(k 为大于零的常数)，当 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 时，飞轮的角加速度是多少？从开始制动到现在经历的时间是多少？

解 (1) $M=-k\omega^2$，故由转动定律有

$$-k\omega^2=J\alpha \quad 即\ \alpha=-\frac{k\omega^2}{J}$$

$$\because \omega=\frac{1}{3}\omega_0 \qquad \therefore \alpha=-\frac{k\omega_0^2}{9J}$$

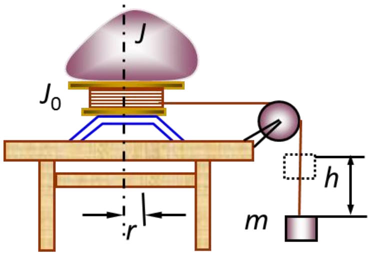
(2) $$M=J\alpha=J\frac{d\omega}{dt} \qquad -k\omega^2=J\frac{d\omega}{dt}$$

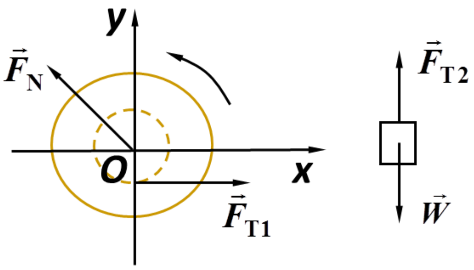
t=0 时，$\omega=\omega_0$ 两边积分

$$\int_{\omega_0}^{\frac{1}{3}\omega_0}\frac{d\omega}{\omega^2}=-\int_0^{t}\frac{k}{J}dt$$

故当 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 时，制动经历的时间为 $t=\frac{2J}{k\omega_0}$

课堂训练：如图表示一种用实验方法测量转动惯量的装置。待测刚体装在转动架上，线的一端绕在转动架的轮轴上，线与线轴垂直，轮轴的轴体半径为 r，线的另一端通过定滑轮悬挂质量为 m 的重物，已知转动架惯量为 J_0，并测得 m 自静止开始下落 h 高度的时间为 t，求待测物体的转动惯量 J，不计两轴承处的摩擦，不计滑轮和线的质量，线的长度不变.





解:

分别以质点 m 和转动系统 J+J_0 作为研究对象，受力分析如图.

$$F_{T1}r=(J+J_0)\alpha$$

$$mg-F_{T2}=ma$$

$$F_{T1}=F_{T2}$$

$$a=r\alpha$$

$$h=\frac{1}{2}at^2$$

$$J=mr^2(\frac{gt^2}{2h}-1)-J_0$$

作业：1、2、7