第 3 讲 曲线运动的描述

教学要求：

理解切线加速度、法向加速度，理解线量和角量的关系。

通过课堂训练巩固所学知识。

重点与难点：

重点：切线加速度、法向加速度。

难点：切线加速度、法向加速度。

1.3　曲线运动的描述

对于质点作平面曲线运动,我们通常在自然坐标系中加以描述。圆周运动是曲线运动的一个重要特例。本节首先讨论质点作圆周运动时，描述运动的物理量在自然坐标系中的表示，然后再推广到一般的平面曲线运动。

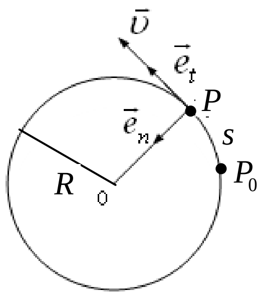


图 1–7 自然坐标系

1.3.1　自然坐标系

如图 1-7，质点 P 作圆周运动，在圆周上任取固定点 P_0 作为原点，选定沿轨迹量取弧长，则质点的位置可用弧坐标 s 来确定。

$$s = f(t) \tag{1-24}$$

上式称为质点**运动方程的自然坐标表示**。

如图 1-7，在轨迹上任一点建立自然坐标系，一根坐标轴通过点 P 沿轨迹的切线方向并指向质点前进的一侧，该方向单位矢量用 $\vec{e}_t$ 表示；另一坐标轴通过该点沿轨迹的法线方向并指向曲线的凹侧，该方向单位矢量用 $\vec{e}_n$ 表示。必须指出，随着 P 点在轨迹上的移动，$\vec{e}_t$ 和 $\vec{e}_n$ 的方向在不断的变化，这一点与直角坐标系不同。

1.3.2　速度和加速度的自然坐标表示

质点的速度沿轨迹的切向，　所以在自然坐标系中表示为

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{e}_t \tag{1-25}$$

其中

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-26}$$

为速率。

将式（1-25）代入加速度的定义式（1-17）得

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+\upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} \qquad （1-27）$$

上式中，第一项方向与$\vec{e}_t$共线，称为切向加速度，用$\vec{a}_t$表示，即

$$\vec{a}_t=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t=a_t\vec{e}_t \qquad （1-28）$$

a_t为加速度$\vec{a}$的切向分量，反映质点速度大小变化的快慢。

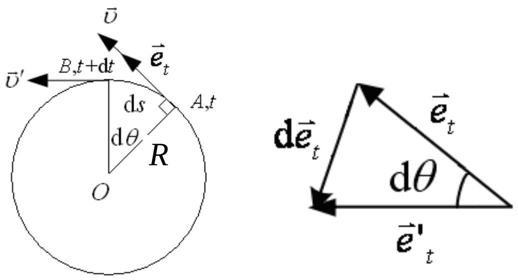
注意 a_t为一代数量，可正可负。$a_t>0$，表示$\vec{a}_t$的方向与$\vec{e}_t$的方向相同；$a_t<0$，表示$\vec{a}_t$的方向与$\vec{e}_t$的方向相反。

下面研究式（1-27）中第二项$\upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$。如图 1−8，质点由点 *A* 运动到点 *B*，所对应的圆心角为$\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}\vec{e}_t=\vec{e}'_t-\vec{e}_t$。因为$\vec{e}_t\perp OA$，$\vec{e}'_t\perp OB$，所以$\vec{e}_t$、$\vec{e}'_t$夹角为$\mathrm{d}\theta$。当$\mathrm{d}\theta\to 0$时，有$|\mathrm{d}\vec{e}_t|=|\vec{e}_t|\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta$，且$\mathrm{d}\vec{e}_t\perp\vec{e}_t$，所以$\mathrm{d}\vec{e}_t$由点 *A* 指向圆心 *O*，有

$$\mathrm{d}\vec{e}_t=\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_n$$

式（1-27）中第二项为

$$\upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=\upsilon\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n}=\upsilon\frac{\mathrm{d}(R\theta)}{R\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n}=\frac{\upsilon}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\mathrm{n}=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_\mathrm{n}$$



(a)　　　　(b)

图 1−8　圆周运动中法向加速度表达式推导

该项为矢量，称为法向加速度，其方向沿半径指向圆心用$\vec{a}_n$表示，即

$$\vec{a}_n=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n=a_n\vec{e}_n \qquad （1-29）$$

a_n是加速度的法向分量，反映质点速度方向变化快慢。

综上所述，质点做圆周运动时加速度的自然坐标表示是

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+\frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n \qquad （1-30）$$

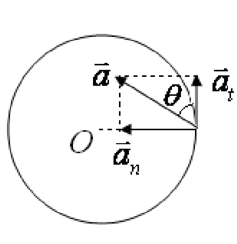


图 1−9 加速度的方向

加速度的大小

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2} \qquad （1-31）$$

方向可以用 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}_t$ 夹角（图 1-9）来表示

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t}$$

注意 1 上述关于圆周运动的切向加速度、法向加速度和总加速度的表示式也适用于任何二维的（即平面上的）曲线运动。这时 $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_n$、$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}$，式中 ρ 是曲线上所涉及点处的曲率半径（即该点曲率圆的半径）。

2 $\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$ 是质点运动的总加速度，包括了切向加速度和法向加速度，而 $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = a_t$ 只表示切向加速度分量，因此 $\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ 不是同一个概念，且 $\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$ 的模 $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\right|$ 一般不等于 $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$。

3 质点运动时，如果只有切向加速度，没有法向加速度，那么速度不改变方向只改变大小，这就是变速直线运动。如果只有法向加速度，没有切向加速度，那么速度只改变方向不改变大小，这就是匀速（率）曲线运动。一般情况下，质点运动时同时伴随着切向加速度和法向加速度的变化。

4 对圆周运动，如 $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 0,$ 即切向加速度 $a_t = 0,$ 此时 $\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n$，就是大家在中学已熟悉的匀速（率）圆周运动的情形。

例 1–5 质点作半径为 R 的圆周运动，路程的表达式为 $s = bt + ct^3$，其中 b 、c 均为正常数。求质点在 t 时刻的速率 υ 、切向加速度 $\vec{a}_t$ 的大小、法向加速度 $\vec{a}_n$ 的大小和总加速度 $\vec{a}$ 的大小。

解 质点在 t 时刻的速率 $\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(bt + ct^3) = b + 3ct^2$

切向加速度 $a_t = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 6ct$ 法向加速度 $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(b + 3ct^2)^2}{R}$

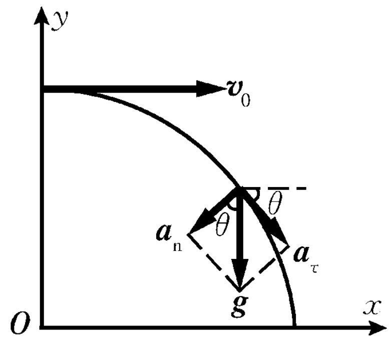
总加速度 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{36c^2t^2 + \frac{(b + 3ct^2)^4}{R^2}}$

课堂训练：一质点沿半径为 R 的圆周运动，质点所经过的弧长与时间的关系为：$S = bt + \frac{1}{2}ct^2$，其中 b、c 是大于零的常量，求从 t=0 开始到达切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间.

解：$v=\frac{ds}{dt}=b+ct$ ， $a_t=\frac{dv}{dt}=c$， $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b+ct)^2}{R}$ ，

由题意: $a_t=a_n$， 解得：$t=\sqrt{\frac{R}{c}}-\frac{b}{c}$

课堂训练: 以速度 v_0 平抛一小球，不计空气阻力，求 t 时刻小球的切向加速度量值 a_t、法向加速度量值 a_n 和轨道的曲率半径 ρ.



解：由图可知 $a_t=g\sin\theta=g\frac{v_y}{v}$

$$=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}=g\frac{gt}{\sqrt{{v_0}^2+g^2t^2}}$$

$$a_n=g\cos\theta=g\frac{v_x}{v}=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$$

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_x^2+v_y^2}{a_n}=\frac{(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}$$

1.3.3 圆周运动的角量描述

质点作圆周运动时，常用角位置、角速度和角加速度等角量来描述。

1 圆周运动的角量描述

如图 1-10，质点在 Oxy 平面内做半径为 R 的圆周运动，t 时刻质点在 A 处，$t+\Delta t$ 时刻质点在 B 处，θ 是 OA 与 x 轴正向夹角，$\theta+\Delta\theta$ 是 OB 与 x 轴正向夹角，称 θ 为 t 时刻质点的角坐标，角坐标 θ 随时间的变化关系

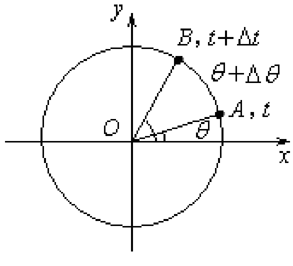


图 1-10 角位置与角位移

$$\theta = \theta(t) \qquad (1\text{-}32)$$

称为质点作圆周运动时的运动方程。

$\Delta\theta$ 为 $t-t+\Delta t$ 时间间隔内角坐标增量，称为在时间间隔 Δt 内的角位移。通常规定角位移逆时针方向为正，顺时针方向为负。角坐标与角位移的单位是弧度（rad）。

角坐标对时间的一阶导数，就是角速度，用 ω 表示

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}33)$$

角速度的单位是弧度 / 秒（rad/s）。

角速度对时间的一阶导数或角坐标对时间的二阶导数，就是角加速度，用 α 表示

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad (1\text{-}34)$$

角加速度的单位是弧度 / 秒 ^{2}（rad/s^2）。

讨论 （1） 若角加速度 α 与角速度 ω 方向一致，即符号相同，则质点加速转动；若角加速度 α 与角速度 ω 方向相反，即符号相反，则质点减速转动。

（2） 若质点作匀速圆周运动，即 ω 不变，此时有 $\theta = \theta_0 + \omega t$

若质点作匀变速圆周运动，即 α 不变，此时有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \text{ 、 } \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \text{ 和 } \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

上列各式中 θ_0、ω_0 分别表示初角位置、初角速度。

2 线量与角量的关系

我们把描述质点运动的物理量速度 $\vec{\upsilon}$ 、速率 υ 、加速度 $\vec{a}$ 、切向加速度 $\vec{a}_t$ 和法向加速度 $\vec{a}_n$ 等称为线量，把描述质点作圆周运动的物理量角位置 θ、角速度 ω，角加速度 α 等称为角量。下面来研究两者之间的关系。

（1）υ 与 ω 的关系

如图 1-11，t 时刻质点处于点 A，$t+\mathrm{d}t$ 时刻质点处于点 B，当 $\mathrm{d}t \to 0$ 时，位移的大小 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$

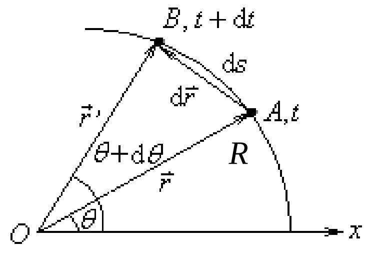


图 1-11 推导线量与角量之间的关系

有 $\qquad \dfrac{|\mathrm{d}\bar{r}|}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

即 $\qquad \upsilon=R\omega \qquad$ （1-35）

式（1-35）即为线速度与角速度的关系。

（2）a_t 与 α 的关系

将式（1-35）两边对 t 求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即

$$a_t=R\alpha \qquad \text{（1-36）}$$

式（1-36）即为切向加速度与角加速度的关系。

（3）a_n 与 ω 的关系

将 $\upsilon=R\omega$ 代入法向加速度公式 $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{R}$ 可得法向加速度与角速度 ω 的关系

$$a_n=\upsilon\omega=R\omega^2 \qquad \text{（1-37）}$$

注意式（1-32）、式（1-33）、式（1-34）、式（1-35）和式（1-36）中的 θ、ω、α、υ 和 a_t 均为代数量，其正负均相对于质点绕行正方向（通常取为逆时针方向）而言，为正表示与绕行正方向一致，为负表示与绕行正方向相反。

课堂训练：对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

（B）法向加速度必不为零（拐点处除外）；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

（E）若物体的加速度 为恒矢量，它一定作匀变速率运动 .

解：（B）

课堂训练：质点作半径为 R 的变速圆周运动的加速度大小为：

（A）$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ （B）$\dfrac{v^2}{R}$ （C）$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v^2}{R}$ （D）$\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{v^2}{R})^2}$

解：（D）

例 1-6 质点沿半径为 $R=1\ \mathrm{m}$ 的圆周运动，用角坐标表示其运动方程为 $\theta=(3+\frac{1}{3}t^3)\ \mathrm{rad}$，求（1）$t=1\ \mathrm{s}$ 时，质点的切向加速度和法向加速度的大小；（2）当切向加速度的大小恰好等于总加速度大小的一半时，θ 的值等于多少？

解 （1）质点在 t 时刻的角速度和角加速度分别为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=t^2 \qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2t$$

$t=1\ \mathrm{s}$ 时，切向加速度、法向加速度的大小分别为

$$a_t=R\alpha=2Rt=2\ \mathrm{m/s^2} \qquad a_n=R\omega^2=Rt^4=1\ \mathrm{m/s^2}$$

（2）总加速度为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(R\alpha)^2+(R\omega^2)^2}=t\sqrt{4+t^6}$$

据题意有

$$a_t=\frac{1}{2}a \qquad 即 \qquad 2t=\frac{1}{2}t\sqrt{4+t^6}$$

解得

$$t^3=2\sqrt{3}\ \mathrm{s^3}$$

代入运动方程可得

$$\theta=3+\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}=4.15\ (\mathrm{rad})$$

作业：17