第 4 讲 运动学中的两类基本问题　相对运动　习题课 1

教学要求

掌握运动学中两类问题的计算。了解相对运动。

重点与难点

重点：运动学中的两类问题。

难点：矢量及其计算。

通过课堂训练巩固所学知识。

1.4　运动学中的两类基本问题

前面介绍了描述质点运动的基本物理量，位矢（角位置）、速度（角速度）和加速度（角加速度）等。对于质点运动学,主要有两类基本问题。下面以直线运动为例，对这两类问题进行研究。

1、由运动方程 $x = x(t)$，求质点的速度和加速度。这类问题主要是根据速度和加速度的定义，进行求导数。在这类问题中，运动方程有时是直接给出，有时需要根据题意建立。建立运动方程，首先要建立坐标系。

例 1-7 已知一质点的运动方程为 $\vec{r} = 3t\vec{i} - 4t^2\vec{j}$，式中 $\vec{r}$ 以 m 计，t 以 s 计，求质点运动的轨道、速度、加速度.

解 将运动方程写成分量式

$x = 3t$　，$y = -4t^2$

消去参变量 t，得轨道方程： $4x^2 + 9y = 0$，这是顶点在原点的抛物线.

由速度定义得

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} - 8t\vec{j}$$

其模为 $v = \sqrt{3^2 + (8t)^2}$，与 x 轴的夹角 $\theta = \arctan\dfrac{-8t}{3}$.

由加速度的定义得

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -8\vec{j}$$

即加速度的方向沿 y 轴负方向，大小为 $8m/s^2$.

2、 已知加速度函数及初始条件（$t = 0$ 时质点的位置、速度），或已知速度函数和初始条件（$t = 0$ 时质点的位置），求质点的运动方程。这类问题主要应用积分的方法加以求解。该类问题常见的有三种：

（1） 已知加速度是时间的函数，即 $a=a(t)$，这种情况考虑初始条件直接积分如**例 1-8**。

（2） 已知加速度是速度的函数，即 $a=a(\upsilon)$，这时可由问题需要选择下列两种方法之一进行分离变量求解。

由 $a\left(\upsilon\right)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$，得 $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{a(\upsilon)}=\mathrm{d}t$，应用初始条件积分得 $\upsilon\left(t\right)$，如**例 1-9**。

由 $a\left(\upsilon\right)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$，得 $\mathrm{d}x=\dfrac{\upsilon\mathrm{d}\upsilon}{a\left(\upsilon\right)}$，应用初始条件积分得 $x\left(\upsilon\right)$。如**例 1-10。**

（3） 已知加速度是位置的函数，即 $a=a(x)$，这种情况需进行积分变量的变换，由 $a(x)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$，得 $\upsilon\mathrm{d}\upsilon=a(x)\mathrm{d}x$，应用初始条件积分，如**例 1-11**。

例 1-8　质点沿 x 轴以加速度 $a=4t\ \ \mathrm{m/s^2}$ 运动，设初始条件为：$t=0$ 时，$\upsilon_0=0$，$x_0=10\ \mathrm{m}$，求速度和运动方程的表达式。

解　由

$$a=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=4t$$

得

$$\mathrm{d}\upsilon=4t\mathrm{d}t$$

代入初始条件积分

$$\int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon=\int_0^t 4t\mathrm{d}t$$

得到

$$\upsilon=2t^2\mathrm{m/s}$$

由

$$\upsilon=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t^2$$

得

$$\mathrm{d}x=2t^2\mathrm{d}t$$

代入初始条件积分，

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$$

得

$$x=(\frac{2}{3}t^3+10)\ \mathrm{m}$$

例 1-9 运动会上跳水运动员沿铅直方向入水，自水面向下取坐标轴 Oy，运动员接触水面时速率为 υ_{0y}，入水后铅直下沉时加速度 $a_y=-k\upsilon_y^2$，其中 k 为正常量，求 （1） 入水后运动员速度随时间 t 的变化关系；（2） 入水后运动员的运动方程。

解 （1）视运动员为质点，由题意　$a_y=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}=-k\upsilon_y^2$

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\upsilon_y^2}=-k\mathrm{d}t$$

设运动过程中t时刻速度为υ_y，考虑到入水开始计时$\upsilon_y=\upsilon_{0y}$

积分得 $$\frac{1}{\upsilon_y}-\frac{1}{\upsilon_{0y}}=kt$$

或 $$\upsilon_y=\upsilon_{0y}/(k\upsilon_{0y}t+1)$$

（2） 由 $$\upsilon_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

得 $$\int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \upsilon_y \mathrm{d}t$$

代入υ_y表达式，对上式进行积分，并考虑到$t=0$时，$y_0=0$得运动方程

$$y=\frac{1}{k}\ln(k\upsilon_{0y}t+1)$$

例 1-10 在**例 1-9** 中求运动员入水后速度随深度y的变化关系。

解 由于υ_y是入水深度y的函数，根据加速度的定义有

$$a_y=\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\upsilon_y\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}y}=-k\upsilon_y^2$$

即 $$\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\upsilon_y}=-k\mathrm{d}y$$

考虑到$t=0$时，$\upsilon_y=\upsilon_{0y}$积分得 $$\upsilon_y=\upsilon_{0y}\mathrm{e}^{-ky}$$

例 1-11 某质点以加速度$a=-\dfrac{k}{x^2}$的规律作直线运动，若初始时刻质点静止于x_0处，试求它在x处的速度。

解 由题意 $$a=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{x^2}$$

将上式变形得

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}=-\frac{k}{x^2} \qquad \text{或} \qquad \upsilon\mathrm{d}\upsilon=-\frac{k}{x^2}\mathrm{d}x$$

考虑初始条件$t=0,\upsilon_0=0,x_0=0$，积分得 $$\upsilon=\sqrt{2k(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0})}$$

课堂训练：一质点沿 x 轴运动，其加速度$a=-kv^2$，式中 k 为正常数，设 t=0 时，x=0，$v=v_0$（1）求v和 x 作为 t 的函数的表示式；（2）求v作为 x 函数的表示式。

解 (1)因为$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=-kv^2\mathrm{d}t$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\mathrm{d}t$ 积**分得** $kt=\frac{1}{v}+c_1$

因为 t＝0 时，$v=v_0$， 所以$c_1=-\frac{1}{v_0}$.代入，并整理得 $v=\frac{v_0}{1+v_0kt}$

再由$\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，将v的表示式代入，并取积分

$$x=\int\frac{v_0\mathrm{d}t}{1+v_0kt}+c_2=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)+c_2$$

因为 t＝0 时，x＝0，所以 c_2＝0.于是 $x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$

(2)因为 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 所以有 $\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$

分离变量，并取积分 $-\int k\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}v}{v}+c_3$ $-kx=\ln v+c_3$

因为 x＝0 时，$v=v_0$，所以$c_3=-\ln v_0$. 代入，并整理得

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

讨论 **（1）**与直线运动相同，在二维（三维）运动中也有两类基本问题的计算，如**例 1-2** 和 **1-3** 为第一类基本问题。可以看出，处理二维（三维）运动，对每一个分量的处理方法与本节介绍的方法相同。

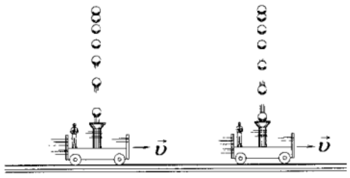
（2）对于质点的圆周运动也有两类基本问题：（1）已知运动方程$\theta=\theta(t)$或$S=S(t)$，求质点的角速度和角加速度，这类问题主要根据角速度和角加速度的定义求导数如**例 1-6**。（2）已知角加速度函数及初始条件（$t=0$时质点的角位置、角速度），或已知角速度函数和初始条件（$t=0$时质点的角位置），求质点的运动方程，这类问题主要应用积分的方法加以求解。

1.5 相对运动

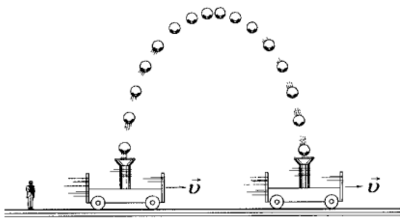
质点的运动轨迹依赖于观察者（即参照系）的例子是很多的。例如一个站在作匀速直线运动的车上，竖直向上抛出一个钢球，车上的观察者看到钢球竖直上升并竖直下落，如图

1-14（a），但站在地面上的另一人却看到钢球的运动轨迹为一抛物线如图 1-14（b）。

从这个例子可以看出，钢球的运动情况取决于参照系，亦即依赖于物体间的相互关系。这个例子也就是 1.1.1 节中所述的运动的描述具有相对性。



(a)车作匀速直线运动时，车上的人观察到钢球作直线运动



(b)车作匀速直线运动时，地面上的人观察到钢球作抛物线运动

图 1-14 物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参照系

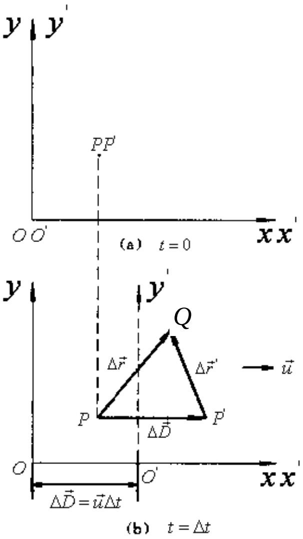


图 1-15 质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

设有两个参照系，一个为K 系（即Oxy坐标系），另一个为K'系(即$O'x'y'$坐标系)。开始时(即$t = t' = 0$)这两个参照系相重合。某质点在K 系中的位置以P表示,而在K'系中的位置以P'表示,如图 1-15（a）。

如果在Δt时间内，K'系沿Ox轴以速度$\vec{u}$相对K 系运动的同时,质点运动到点Q。这段时间内，K'系沿Ox轴相对K 系的位移为$\Delta\vec{D} = \vec{u}\Delta t$；在K 系中，质点从点$P$运动到点$Q$，其位移为$\Delta\vec{r}$；而在$\mathrm{K}'$系中,质点从点$P'$运动到点$Q$,其位移为$\Delta\vec{r}'$，如图 1-15（b）。那么，从K 系看来，质点的位移$\Delta\vec{r}$应等于K'系相对K 系位移$\Delta\vec{D}$与质点在K'系中的位移$\Delta\vec{r}'$之和，即

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{D} = \Delta\vec{r}' + \vec{u}\Delta t \qquad (1\text{-}38)$$

上式表明，质点的位移取决于参照系的选择。用时间Δt除式（1-37），取$\Delta t \to 0$时的极限值，得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \vec{u}$$

即 $$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}^{'}+\vec{u} \tag{1-39}$$

式中$\vec{u}$为K$^{'}$系相对K系的速度，$\vec{\upsilon}^{'}$为质点相对K$^{'}$系的速度，$\vec{\upsilon}$为质点相对K系的速度。上式的物理意义是：质点相对K系的速度等于它相对K$^{'}$系的速度与K$^{'}$系相对K系的速度之矢量和（图 1-16）。

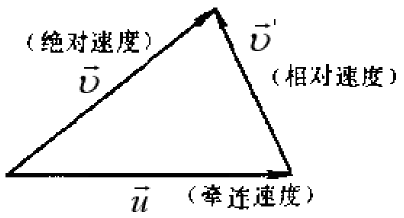


图 1-16 速度的相对性

习惯上，常把静止的参照系K称为基本参照系，把相对K系运动的参照系K$^{'}$称为运动参照系。这样，将质点用A表示，则A相对基本参照系K的速度$\vec{\upsilon}$就叫做绝对速度，并记为$\vec{\upsilon}_{AK}$，相对运动参照系K$^{'}$的速度$\vec{\upsilon}^{'}$叫做相对速度，并记为$\vec{\upsilon}_{AK'}$，而运动参照系K$^{'}$相对基本参照系K的速度$\vec{u}$叫做**牵连速度**，并记为$\vec{\upsilon}_{K'K}$。于是式（1-39）可理解为：质点相对基本参照系的绝对速度$\vec{\upsilon}_{AK}$，等于质点相对运动参照系的相对速度$\vec{\upsilon}_{AK'}$与运动参照系相对基本参照系的牵连速度$\vec{\upsilon}_{K'K}$之和。即

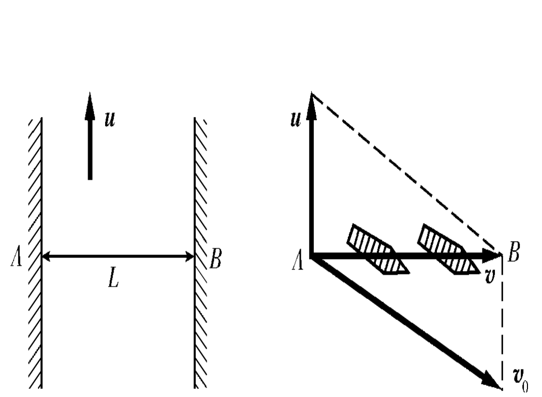
$$\vec{\upsilon}_{AK}=\vec{\upsilon}_{AK'}+\vec{\upsilon}_{K'K}$$

式（1-39）给出了在两个以恒定的速度作相对运动的参照系中质点的速度与参照系的关系，即质点的速度变换关系式。这个式子叫做**伽利略速度变换式**，需要指出的是，当质点的速度接近光速时，伽利略速度变换式就不适用了，此时速度的变换应当遵循洛伦兹速度变换式。

例 1-12 如图 1-17(a)所示，河宽为L，河水以恒定速度u流动，岸边有A，B码头，A，B连线与岸边垂直，码头A处有船相对于水以恒定速率v_0开动，证明：船在A，B两码头间往返一次所需时间为

$$t=\frac{\frac{2L}{v_0}}{\sqrt{1-(\frac{u}{v_0})^2}}$$

（船换向时间忽略不计）.



解

设船相对于岸边的速度(绝对速度)为 v，由题知，v 的方向必须指向 A，B 连线，此时河水流速 u 为牵连速度，船对水的速度 v_0 为相对速度，于是有

图 1-17 例题 1-12 图

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_0$$

据此作出矢量图，如图 1.17(b)，由图知

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - u^2}$$

读者自己可证当船由 B 返回 A 时,船对岸的速度的模亦由上式给出.因为在 AB 两码头往返一次的路程为 $2L$，故所需时间为

$$t = \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{v}} = \frac{2\mathrm{L}}{\sqrt{v_0^2 - u^2}} = \frac{\dfrac{2\mathrm{L}}{\mathrm{v}_0}}{\sqrt{\left(1\text{-}\left(\dfrac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}_0}\right)^2\right)}}$$

讨论：

(1)若 $u=0$，即河水静止，则 $t = \dfrac{2\mathrm{L}}{\mathrm{v}_0}$ ，这是显然的.

(2)若 $u=v_0$ ，即河水流速 u 等于船对水的速率 v_0 ，则 $t\to\infty$，即船由码头 A(或 B)出发后就永远不能再回到原出发点了.

(3)若 $u>v_0$ ，则 t 为一虚数，这是没有物理意义的，即船不能在 A，B 间往返.

综合上述讨论可知，船在 A，B 间往返的必要条件是

$$\mathrm{v}_0 > u$$

例 1-13　如图 1-18(a)所示，一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1 ，下落雨滴的速度方向与铅直方向成 θ 角，偏向于汽车前进方向，速率为 v_2 ，车后有一长方形物体 A(尺寸如图所示)，问车速 v_1 多大时，此物体刚好不会被雨水淋湿.

解： $\because \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

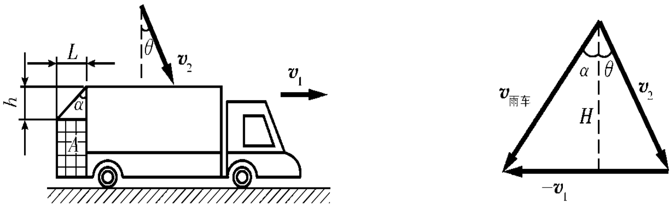
所以 $\vec{v}_{雨车} = \vec{v}_{雨} - \vec{v}_{车} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \left(-\vec{v}_1\right)$

据此可作出矢量图，如图 1-18(b).即此时 $v_{雨车}$ 与铅直方向的夹角为 α，而由图 1-18(a)有

$$\tan\alpha = \frac{L}{h}$$

而由图 1-18(b)可算得

$$H = v_2 \cos\theta$$



(a)　(b)

$$v_1 = v_2\sin\theta + H\tan\alpha = v_2\sin\theta + v_2\cos\theta\frac{L}{h}$$

图 1-18 例题 1-13 图

习题课 1：

例 1 填空题

(1) 一质点，以 $\pi m\cdot s^{-1}$ 的匀速率作半径为 5m 的圆周运动，则该质点在 5s 内，位移的大小是__________________；经过的路程是__________________。

[答案： 10m； 5π m]

(2) 一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间的变化关系为 a=3+2t (SI)，如果初始时刻质点的速度 v_0 为 $5m\cdot s^{-1}$，则当 t 为 3s 时，质点的速度 v=__________________。

[答案： $23m\cdot s^{-1}$]

例 2 选择题

(1) 一质点作直线运动，某时刻的瞬时速度 $v=2m/s$，瞬时加速度 $a=-2m/s^2$，则一秒钟后质点的速度

(A)等于零 (B)等于-2m/s

(C)等于 2m/s (D)不能确定。

[答案：D]

(2) 一质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 t 秒转一圈，在 2t 时间间隔中，其平均速度大小和平均速率大小分别为

(A) $\frac{2\pi R}{t},\frac{2\pi R}{t}$ (B) $0,\frac{2\pi R}{t}$

(C) $0,0$ (D) $\frac{2\pi R}{t},0$

[答案：B]

(3)一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\frac{dr}{dt}$ (B) $\frac{d\vec{r}}{dt}$

(C) $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$ (D) $\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

［答案：D］

例 3　下面几个质点运动学方程，哪个是匀变速直线运动？

（1）$x=4t-3$；（2）$x=-4t^3+3t^2+6$；（3）$x=-2t^2+8t+4$；（4）$x=2/t^2-4/t$。

给出这个匀变速直线运动在 t=3s 时的速度和加速度，并说明该时刻运动是加速的还是减速的。（x 单位为 m，t 单位为 s）

解：匀变速直线运动即加速度为不等于零的常数时的运动。加速度又是位移对时间的两阶导数。于是可得（3）为匀变速直线运动。

其速度和加速度表达式分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-4t+8$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-4$$

t=3s 时的速度和加速度分别为 v=-4m/s，a=-4m/s^2。因加速度为正所以是加速的。

例 4 一质点在 xOy 平面上运动，运动方程为

$$x=3t+5,\quad y=\frac{1}{2}t^2+3t-4.$$

式中 t 以 s计，x，y 以m计．(1)以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表示式；(2)求出 t=1 s 时刻和 t =2s 时刻的位置矢量，计算这1秒内质点的位移；(3)计算 t =0 s时刻到 t =4s 时刻内的平均速度；(4)求出质点速度矢量表示式，计算 t =4 s 时质点的速度；(5)计算 t =0s 到 t =4s 内质点的平均加速度；(6)求出质点加速度矢量的表示式，计算 t =4s 时质点的加速度(请把位置矢量、位移、平均速度、瞬时速度、平均加速度、瞬时加速度都表示成直角坐标系中的矢量式)．

解：(1)　$\vec{r}=(3t+5)\vec{i}+(\frac{1}{2}t^2+3t-4)\vec{j}$ m

(2)将 $t=1$，$t=2$ 代入上式即有

$$\vec{r}_1=8\vec{i}-0.5\vec{j}\ \ \text{m}$$

$$\vec{r}_2=11\vec{i}+4\vec{j}\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=3\vec{i}+4.5\vec{j}\ \text{m}$$

(3)∵　$\vec{r}_0=5\vec{i}-4\vec{j},\vec{r}_4=17\vec{i}+16\vec{j}$

$\therefore\ \ \bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{r}_4-\vec{r}_0}{4-0}=\dfrac{12\vec{i}+20\vec{j}}{4}=3\vec{i}+5\vec{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(4) $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=3\vec{i}+(t+3)\vec{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

则 $\vec{v}_4=3\vec{i}+7\vec{j}\ \ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(5)∵ $\vec{v}_0=3\vec{i}+3\vec{j},\vec{v}_4=3\vec{i}+7\vec{j}$

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_4-\vec{v}_0}{4}=\frac{4\vec{j}}{4}=1\vec{j}\qquad \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(6) $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=1\vec{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

这说明该点只有 y 方向的加速度，且为恒量。

例 5 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，a 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，x 的单位为 m. 质点在 $x=0$处，速度为$10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，试求质点在任何坐标处的速度值.

解： ∵ $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

分离变量： $v\mathrm{d}v=a dx=(2+6x^2)\mathrm{d}x$

两边积分得

$$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3+c$$

由题知，$x=0$时，$v_0=10$，$\therefore c=50$

$$\therefore\qquad v=2\sqrt{x^3+x+25}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

例 6 一质点沿半径为1 m 的圆周运动，运动方程为 $\theta=2+3t^3$，式中θ以弧度计，t以秒计，求：(1) $t=2$ s时，质点的切向和法向加速度；(2)当加速度的方向和半径成45°角时，其角位移是多少?

解： $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=9t^2,\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=18t$

(1) $t=2$ s 时， $a_\tau=R\alpha=1\times18\times2=36\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

$$a_n = R\omega^2 = 1\times(9\times 2^2)^2 = 1296\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2)当加速度方向与半径成45°角时，有

$$\tan 45^\circ = \frac{a_\tau}{a_n} = 1$$

即 $R\omega^2 = R\alpha$

亦即 $(9t^2)^2 = 18t$

则解得 $t^3 = \frac{2}{9}$

于是角位移为

$$\theta(t) - \theta(0) = 2 + 3t^3 - 2 = 3\times\frac{2}{9} = \frac{2}{3}\mathrm{rad}$$

作业：12，15