第二讲　速度、加速度

教学要求：

理解速度、加速度。通过课堂训练巩固所学知识。

重点与难点：

重点：速度、加速度。

难点：速度、加速度。

1.2.3　速度

1 平均速度

质点运动的快慢和方向用速度表示。设质点 P 在时间 Δt 内完成了位移 $\Delta\vec{r}$，经历的路程 Δs，我们把位移 $\Delta\vec{r}$ 与时间 Δt 的比值 $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 定义为质点在这段时间内的平均速度，即

$$\bar{\vec{\upsilon}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1-9}$$

2 速率

我们把质点所经历的路程 Δs 与时间 Δt 的比值 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 定义为质点在时间 Δt 内的平均速率，用符号 $\bar{\upsilon}$ 来表示

$$\bar{\upsilon}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-10}$$

注意平均速度 $\bar{\vec{\upsilon}}$ 和平均速率 $\bar{\upsilon}$ 的区别：$\bar{\vec{\upsilon}}$ 是矢量，其方向就是位移 $\Delta\vec{r}$ 的方向，而 $\bar{\upsilon}$ 是标量；$\bar{\vec{\upsilon}}$ 和 $\bar{\upsilon}$ 在数值上一般不相等。如质点沿闭合曲线运动一周，质点的位移为零，平均速度也为零，而质点的路程不为零，因此平均速率不为零。

把 Δt 趋近于零时平均速率的极限称为时刻 t 的**瞬时速率**，简称**速率**，用 υ 表示，即

$$\upsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

3 瞬时速度

如果 Δt 趋近于零，即对式（1-9）取极限，就是位矢对时间的变化率，叫做质点在时刻 t 的瞬时速度，简称速度，用 $\vec{\upsilon}$ 表示，即

$$\vec{\upsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

可见速度等于位矢对时间的一阶导数。

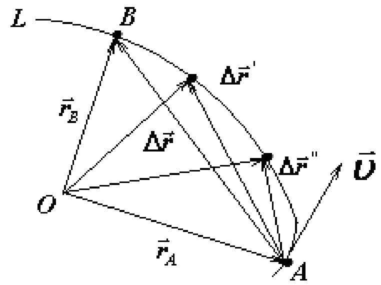


图 1-3 速度矢量

考察质点在 Δt 时间内沿图 1-3 所示的曲线 L 从点 A 运动到点 B 这一过程，随着时间 Δt 的逐渐缩短，

点B逐渐靠近点A，位移分别变为$\Delta\vec{r}'$、$\Delta\vec{r}''$、……。当Δt趋近于零时，位移的方向趋近于曲线在点A的切线方向。所以，当质点沿任意曲线运动时，质点在某点速度的方向就是曲线在该点的切线方向并指向质点前进的一侧。

注意: 速度是矢量，速率是标量;当时间Δt趋近于零时，质点位移的大小$|\Delta\vec{r}|$趋近于路程Δs，故速度的大小$|\vec{\upsilon}|$（$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|$）等于质点在该时刻的速率$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；速率恒为正值。

在国际单位制中，速度和速率的单位为米/秒（$\mathrm{m/s}$）。

4 速度的分量形式

将式（1-2）代入式（1-12），可得质点速度的直角坐标表示

$$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \tag{1-13}$$

若记$\upsilon_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$\upsilon_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$和$\upsilon_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$分别表示速度在$x$、$y$和$z$方向上的分量，则

$$\vec{\upsilon}=\upsilon_x\vec{i}+\upsilon_y\vec{j}+\upsilon_z\vec{k} \tag{1-14}$$

速度的大小可以表示为 $$\upsilon=|\vec{\upsilon}|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2} \tag{1-15}$$

课堂训练：作平面运动的质点在某瞬时位矢为$\vec{r}\left(x,y\right)$,对其速度的大小有四种意见

(1) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$；(2) $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$； (3) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$； (4) $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 。

下列叙述正确的是（ ）

（A）只有（1)（2）正确 （B）只有（2）正确

（C）只有（2)（3）正确 （D）只有（3)（4）正确

解: （D）

例 1-2 已知质点的运动方程为$\vec{r}=(t^2\vec{i}+2t\vec{j})\ \mathrm{m}$，求（1）$t=1\ \mathrm{s}$与$t=2\ \mathrm{s}$时质点的位矢;（2） 在第 2 秒内的平均速度;（3）求速度的表示式及 1 秒末质点的速度。

解 （1） $t=1\mathrm{s}$时 $\vec{r}(1)=(\vec{i}+2\vec{j})\ \mathrm{m}$

$t=2\mathrm{s}$时 $\vec{r}(2)=(4\vec{i}+4\vec{j})\ \mathrm{m}$

（2）第 2 秒内的位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}(2)-\vec{r}(1)=(3\vec{i}+2\vec{j})\ \mathrm{m}$

平均速度 $$\Delta\vec{\upsilon}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=(3\vec{i}+2\vec{j}\ )\text{m/s}$$

（3） 由式（1-13）有 $$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}\vec{j}=(2t\vec{i}+2\vec{j})\ \text{m/s} \qquad (1)$$

或 $$\upsilon_x=\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t}=2t\ \text{m/s}，\ \upsilon_y=\frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}t}=2\ \text{m/s} \qquad (2)$$

当 $t=1\text{s}$ 时， 由式（1）得 $$\vec{\upsilon}(1)=(2\vec{i}+2\vec{j})\ \text{m/s}$$

课堂训练：某质点的运动学方程为$\vec{r}=-10\vec{i}+15t\vec{j}+5t^2\vec{k}$ ，(单位 m, s) 求:（1）t = 0, 1s 时质点的速度矢量;（2）t =0 到 t =1s 质点的平均速度。

解：(1) $$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=15\vec{j}+10t\vec{k} \quad \text{(m/s)}$$

t =0 时，$\vec{v}=15\vec{j}$ (m/s)

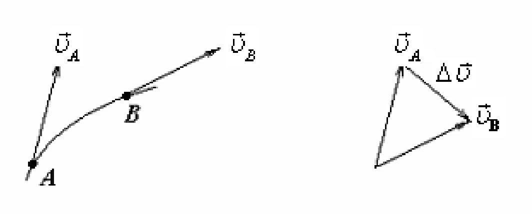
t =1s 时，$\vec{v}=15\vec{j}+10\vec{k}$ m/s

(2) $$\bar{\vec{v}}=\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_0}{t_1-t_0}=\frac{(-10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k})-(-10\vec{i})}{1-0}=15\vec{j}+5\vec{k} \quad \text{(m/s)}$$

1.2.4 加速度

1 平均加速度

速度的变化是用加速度描述的。一般情况下，质点运动速度的大小和方向都随时间而改变。设质点沿图 1-4（a）所示的曲线运动。在t时刻，质点处于点A，其速度为$\vec{\upsilon}_A$，经时间Δt后，质点运动到点B，速度为$\vec{\upsilon}_B$。在此过程中，质点速度的增量$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_B-\vec{\upsilon}_A$，如图 1-4（b）。



(a) (b)

图 1-4 速度的增量

定义该段时间Δt内质点运动的**平均加速度**为

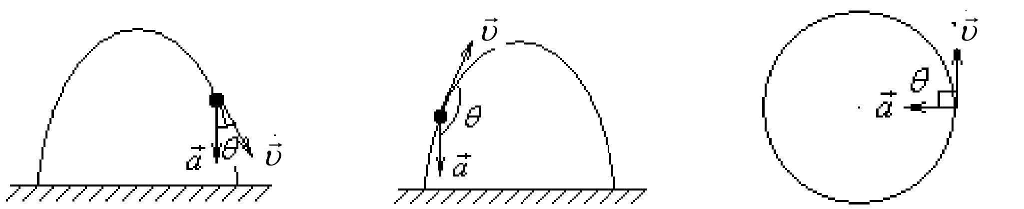
$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \tag{1-16}$$

2 瞬时加速度

如果Δt趋近于零，把式（1-16）的极限，叫做质点在时刻t的瞬时加速度，简称加速度，用$\vec{a}$表示，即

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-17}$$

上式称为质点加速度的矢量表示，它说明：质点的加速度等于速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数。



（a）$\vec{a}$与$\vec{\upsilon}$成锐角　　（b）$\vec{a}$与$\vec{\upsilon}$成钝角　　（c）$\vec{a}$与$\vec{\upsilon}$成直角

图 1-5 曲线运动中的加速度与速度的方向

注意：加速度是矢量，它的方向是当时间Δt趋近于零时速度增量的极限方向，而不是速度的方向;如图 1-5，对于质点作曲线运动，加速度的方向一般与速度的方向不同，当两者成锐角时，速率增加；成钝角时，速率减少；成直角时，速率不变;从图 1-5 可以看出，质点沿曲线运动，其加速度的方向总是指向曲线的凹侧。

在国际单位制中，加速度的单位为米/秒^2（$\mathrm{m/s^2}$）。

3 加速度的分量形式

将位矢和速度的表达式（1-2）与（1-12）代入加速度的定义式（1-17）得到质点加速度的直角坐标表示

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} \tag{1-18}$$

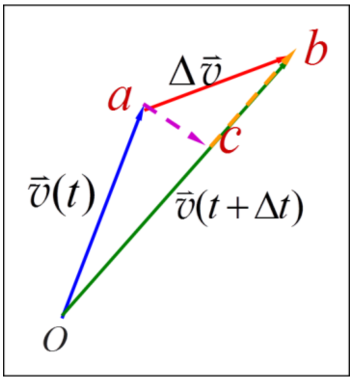
用$a_x=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$、$a_y=\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$和$a_z=\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$分别表示加速度在$x$、$y$和$z$方向上的分量，则

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \tag{1-19}$$

加速度的大小可以表示为

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-20}$$

课堂讨论： $|\Delta\vec{v}|=\Delta v$ 吗？



$\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$　　　　$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)|$

在 Ob 上截取　$o\,c=\ o$　　有　$\Delta v=\overline{cb}$　　$\Delta\vec{v}\ =\overrightarrow{a\,c}\ +\overrightarrow{c}\ \ =\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}+\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}=\overrightarrow{ac}$　　速度方向变化

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}=\overrightarrow{cb}$　　速度大小变化

上述等式不成立。

课堂讨论：问 $|\vec{a}|=a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗？

例　匀速率圆周运动，因为 $v(t)=v(t+\mathrm{d}t)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\equiv 0$，而 $|\vec{a}|=a\neq 0$

所以　$a\neq\dfrac{dv}{dt}$

例 1-3 在质点运动中：已知 $x=a\mathrm{e}^{kt}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bk\mathrm{e}^{-kt}$，其中 a 、b 和 k 均为常量，求质点加速度的分量表达式和矢量表达式。

解　由 $x=a\mathrm{e}^{kt}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bk\mathrm{e}^{-kt}$ 得加速度的分量表达式

$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=ak^2\mathrm{e}^{kt},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=bk^2\mathrm{e}^{-kt}$$

矢量表达式为

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=ak^2\mathrm{e}^{kt}\vec{i}+bk^2\mathrm{e}^{-kt}\vec{j}$$

课堂训练：某质点的运动学方程为$\vec{r}=-10\vec{i}+15t\vec{j}+5t^2\vec{k}$ (单位 m,s) 求质点的加速度矢量.

解： $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=10\vec{k}\ \ \mathrm{m/s^2}$

a =10 $\mathrm{m/s^2}$ 方向沿 z 轴.

例 1-4 如图 1-6，一人用绳子拉着小车前进，小车位于高出绳端 h 的平台上，人的速率 v_0 不变，求小车的速度和加速度大小。

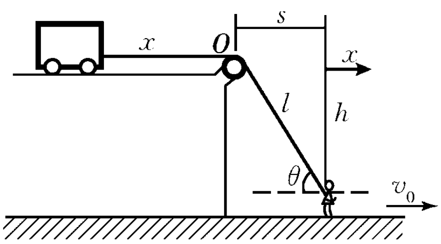


图 1-6 例 1-4 图

解 小车沿直线运动，以小车前进方向为 x 轴正方向，以滑轮为坐标原点，小车的坐标为 x，人的坐标为 s，由速度的定义，小车和人的速度大小应为

$$v_{车}=\frac{dx}{dt},\qquad v_{人}=\frac{ds}{dt}=v_0.$$

由于定滑轮不改变绳长，所以小车坐标的变化率等于拉小车的绳长的变化率，即

$$v_{车}=\frac{dx}{dt}=\frac{dl}{dt}$$

又由图 1-6 可以看出有 $l^2=s^2+h^2$，两边对 t 求导得

$$2l\frac{dl}{dt}=2s\frac{ds}{dt}$$

或

$$v_{车}=\frac{v_{人}s}{l}=v_{人}\frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}=\frac{v_0 s}{\sqrt{s^2+h^2}}$$

可得小车的加速度大小为

$$a=\frac{dv_{车}}{dt}=\frac{v_0^2h^2}{\left(s^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

1.2.5 直线运动

当质点运动的轨迹是一条直线时，质点的运动称为直线运动。取 x 轴与轨迹重合，质点在任意时刻的位置可用坐标 x 表示，x 是时间 t 的函数

$$x=x(t) \tag{1-21}$$

上式就是质点直线运动的运动方程。

质点在直线运动中的速度和加速度分别为

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1-22}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-23}$$

注意 1 在直线运动情况下，由υ、a的正负就能判断速度和加速度的方向。$\upsilon > 0$，表示质点向 x 轴正方向运动；$\upsilon < 0$，向 x 轴负方向运动；$a > 0$, 表明加速度沿 x 轴正方向；$a < 0$，表明加速度沿 x 轴负方向。

2 对于直线运动，物体的加速度与速度的方向相同(即符号相同)时，做加速运动；相反时，做减速运动。

作业：4，7.