

第 39 讲 光在球面上的折射成像 薄透镜

教学要求:

自学

重点与难点:

重点: 自学。

难点: 自学。

13.4 光在球面上的折射成像

1 物像公式

如图 13-9 所示, AOB 是折射率分别为 n_1 和 n_2 两种介质的球面界面, 设 $n_2 > n_1$, 光线从物点 S 发出, 经球面折射后与主光轴相交于 I 点, 即 I 点为像点。由 $\triangle SAC$ 和 $\triangle IAC$ 有

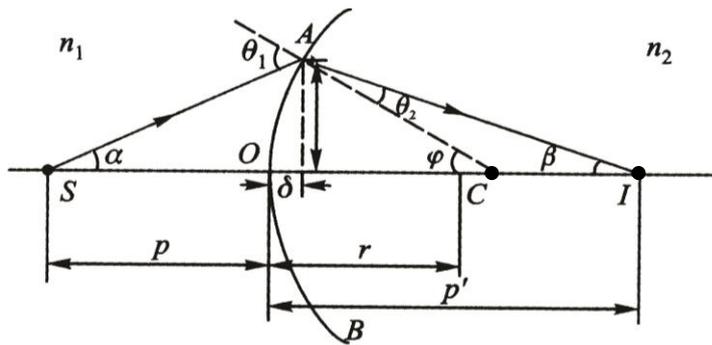


图 13-9 光在球面上的折射

$$\theta_1 = \alpha + \varphi, \quad \varphi = \theta_2 + \beta$$

根据折射定律

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

对近轴光线, α 、 β 、 φ 、 θ_1 、 θ_2 都很小, 有

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$$

将 θ_1 和 θ_2 代入上式得

$$n_1 \alpha + n_2 \beta = (n_2 - n_1) \varphi$$

又
$$\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{h}{-p} \quad \beta \approx \tan \beta \approx \frac{h}{p'} \quad \varphi \approx \tan \varphi \approx \frac{h}{r}$$

于是可得
$$\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (13-8)$$

这就是在近轴光线条件下**球面折射的物像公式**。

2 焦点 焦距

与反射成像类似,若式(13-8)中 $p = -\infty$,即入射光线平行于主光轴,其像点 F' 称为**像方焦点**,相应像距 p' 称为**像方焦距**,以 f' 表示;而折射线平行于主光轴,即 $p' = \infty$,其物点 F 称为**物方焦点**,相应物距 p 称为**物方焦距**,以 f 表示,即

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} r \quad f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \quad (13-9)$$

式(13-8)也可以表示为

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad (13-10)$$

3 横向放大率

与球面反射镜同样地规定 h_o 、 h_i 的正负, $m = \frac{h_i}{h_o}$, 见图 13-10, 可以证明折射球面的**横向放大率**为

$$m = \frac{h_i}{h_o} = \frac{n_1 p'}{n_2 p} \quad (13-11)$$

m 取值的意义与球面反射镜相同。

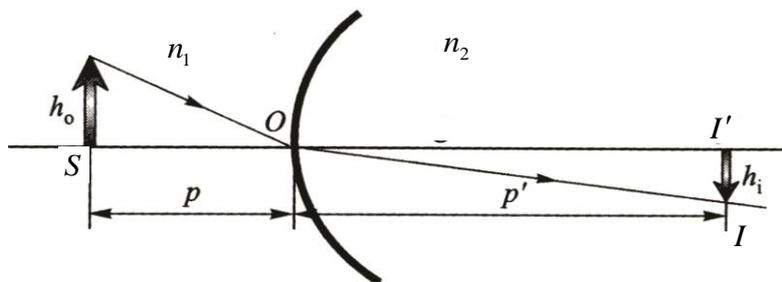


图 13-10 折射球面的横向放大率

说明 (1) 式 (13-8) ~ (13-11), 同样适用于凹折射球面;应用这些公式时,物距、像距、焦距以及曲率半径的正负选择与球面镜规则相同。

(2) 在式(13-8)中,令

$r \rightarrow \infty$, 则得平面折射成像公

$$\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = 0.$$

4 近轴光线的作图法

对于折射球面成像, 选取

下列两条光线能容易作图成像,

如图 13-11 所示。平行于光轴

的入射光折射后经过像方焦点 F' ; 经过物方焦点 F 的入射光折射后平行于光轴。于是将两折射线 (或其延长线) 相交, 即得所成的像。

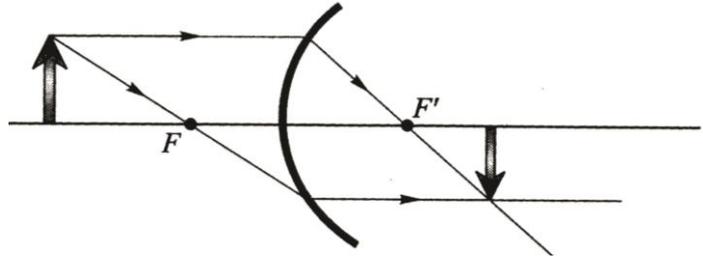


图 13-11 折射球面特殊光线作图法

例 13-3 一玻璃圆球, 半径为 10cm, 折射率为 1.50, 放在空气中, 沿直径的轴上有一物点, 离球面距离为 100 cm (图 13-12)。求像的位置。

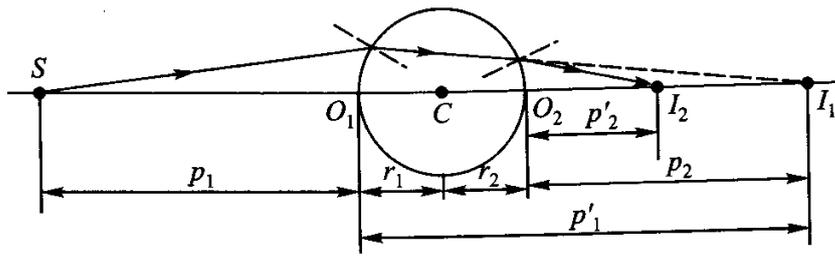


图 13-12 例 13-3 图

解 设物点在球的左侧, 则根据正负号法则有 $p_1 = -100\text{cm}$, $r_1 = 10\text{cm}$, $n_1 = 1.0$ $n_2 = 1.50$

代入式 (13-8) 得

$$\frac{1.50}{p_1} - \frac{1.0}{-100} = \frac{1.50 - 1.0}{10}$$

$$p_1' = 37.5\text{cm}$$

对右侧球面来说, 像点 I_1 为虚物, 根据正负号法则有

$$p_2 = 37.5 - 20 = 17.5(\text{cm}), \quad r_2 = -10\text{cm}, \quad n_1' = 1.50, \quad n_2' = 1.0$$

代入式 (13-8) 得

$$\frac{1.0}{p_2} - \frac{1.50}{17.5} = \frac{1.0 - 1.50}{-10}$$

$$p_2' = 7.35\text{cm}$$

最后成像处距物点的距离为

$$l = |p_1| + 2r + p_2' = 127.35\text{cm}$$

13.5 薄透镜

透镜是由两个曲率半径分别为 r_1 、 r_2 的球面组成(图 13-13)，通常透镜是用玻璃或树脂组成，其折射率为 n ，透镜前后介质的折射率分别记作 n_1 和 n_2 。中央部分比边缘部分厚的透镜称为**凸透镜**，也称**会聚透镜**。中央部分比边缘部分薄的透镜，称为**凹透镜**，也称**发散透镜**。若透镜的厚度远小于两折射面曲率半径时，该透镜称为**薄透镜**。为作图简便起见，分别用图 13-14 中的 (a) 和 (b) 表示薄凸透镜和薄凹透镜。

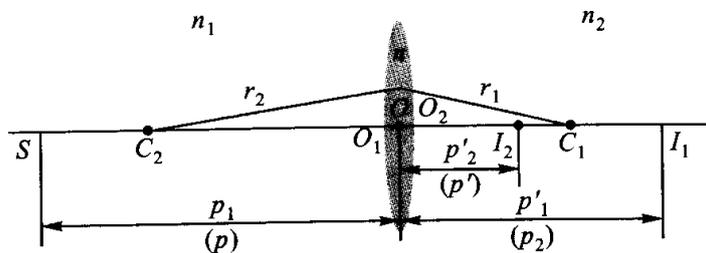


图 13-13 透镜的物像关系

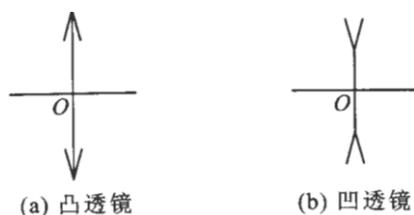


图 13-14 薄透镜的符号

1 近轴光线条件下的薄透镜物像公式

在薄透镜中，两球面的主光轴重合，两顶点 O_1 和 O_2 可视为重合在一点 O ，称为薄透镜的**光心**。

如图 13-13 所示， I_1 是 S 对 r_1 球面的像； I_2 是 I_1 对 r_2 球面的像，于是 I_2 即是 S 的最终像。利用单球面成像关系式(13-8)两次，即可求出 S 与 I_2 之间的成像关系。以 p 表示物对薄透镜的物距，即 $p_1 = p$ ；以 p' 表示像对薄透镜的像距，即 $p_2' = p'$ ，可得薄透镜物像公式

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad (13-12)$$

其中像方焦距为

$$f' = \frac{n_2}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}} \quad (13-13a)$$

物方焦距为

$$f = -\frac{n_1}{\frac{n-n_1}{r_1} + \frac{n_2-n}{r_2}} \quad (13-13b)$$

若薄透镜处于空气中，则 $n_1 = n_2 = 1$ ，可得焦距

$$f' = -f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (13-14)$$

此式被称为**磨镜者公式**。于是薄透镜的物像公式(13-12)可进一步写成

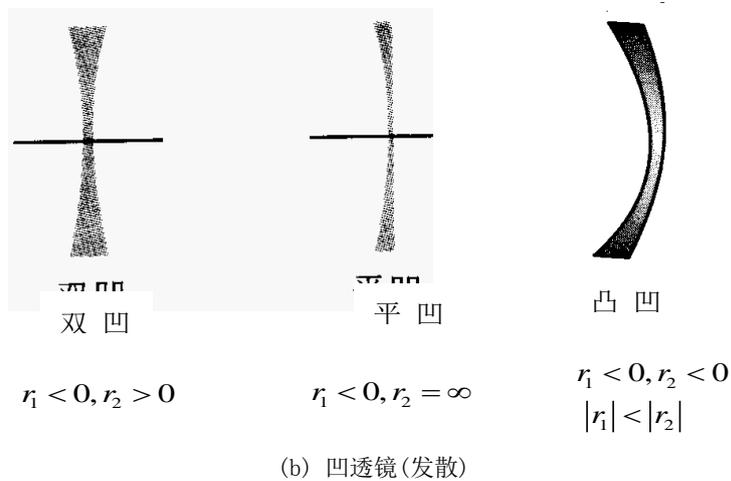
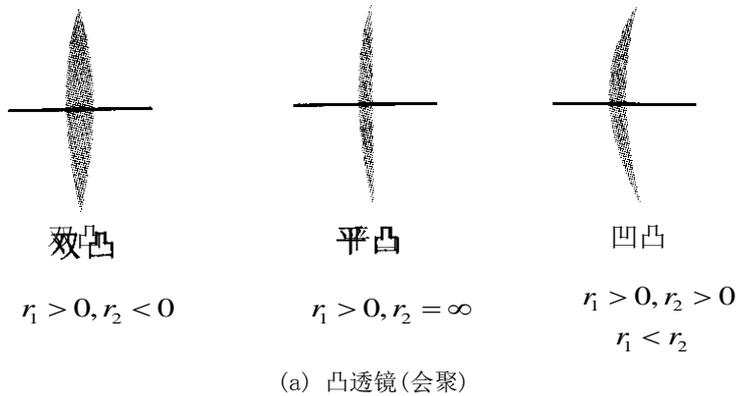


图 13-15 各种形状的透镜

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (13-15)$$

这就是薄透镜在空气中的物像公式。

注意 在应用上式时,正负号的规则与球面反射类似:以光心为分界点,入射光线方向自左向右为正向,则当物点、像点、焦点和曲率中心在光心右侧时,物距、像距、焦距和曲率半径均为正;反之在左侧则为负。

2 凸、凹透镜的类型

根据符号规则,还可以界定出凸、凹透镜的类型。设物(入射光)在左侧,则透镜类型可归纳成图 13-15 的各种类型。

从图 13-15,结合式(13-14),若薄透镜处于空气中,对凸透镜,像方焦点在折射区, $f' > 0$,物方焦点在入射区, $f < 0$;凹透镜相对于凸透镜而言,焦点互换位置, $f' < 0, f > 0$ 。

3 薄透镜的放大率

根据单球面折射横向放大率公式连续两次计算,可得薄透镜的放大率为

$$m = m_1 m_2 = \frac{n_1 p'}{n_2 p} \quad (13-16)$$

若取 $n_1 = n_2 = 1$
$$m = \frac{p'}{p} \quad (13-17)$$

放大率的正负及 $|m|$ 大于、等于和小于 1 的涵义,与单球面时相同。

4 薄透镜成像的作图法

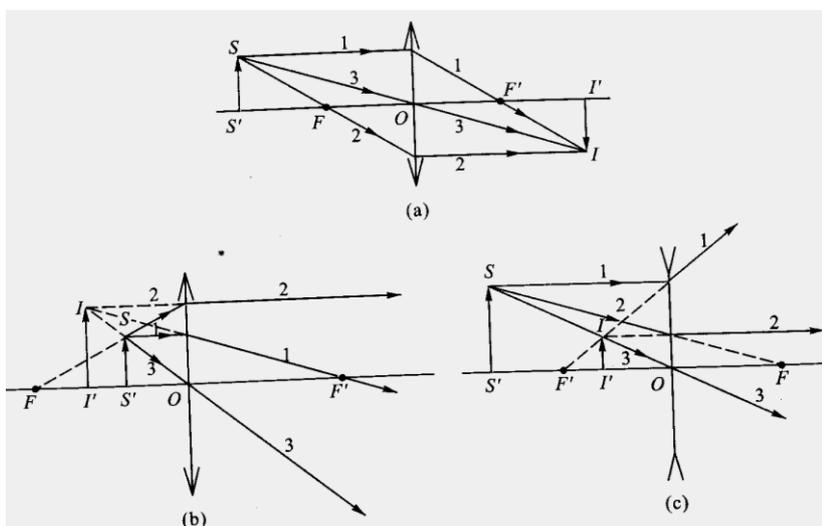


图 13-16 透镜成像光路图

作图时可选择下列三条光线：

- (1) 平行于光轴的光线，经透镜后通过像方焦点 F' 。
- (2) 通过物方焦点 F 的光线，经透镜后平行于光轴；
- (3) 若物像两方折射率相等，通过光心 O 的光线经透镜后方向不变。

从以上三条光线中任选两条作图，出射线的焦点即为像点 I 。图 13-16 画出了透镜成像的部分光路图。

凸 透 镜

物体		像			
位置	类型（虚、实）	位置	类型（虚、实）	方位（倒立、正立）	放大缩小
$-\infty < p < -2f'$					
$p = -2f'$					
$-2f' < p < -f'$					
$p = -f'$					
$-f' < p < 0$					
$0 < p < \infty$					

凹 透 镜

物体		像			
位置	类型（虚、实）	位置	类型（虚、实）	方位（倒立、正立）	放大缩小
$-\infty < p < 0$					
$0 < p < -f'$					
$p = -f'$					
$-f' < p < -2f'$					
$p = -2f'$					
$-2f' < p < \infty$					

例 13-4 如图 13-17 (a) 所示，透镜 1 是一会聚透镜，焦距为 22 cm，一物体放在其左侧 32 cm 处。透镜 2 是一发散透镜，焦距为 57 cm，位于透镜 1 的右侧 41 cm 处。求最后成像的位置并讨论像的性质。

解 先求透镜 1 所成的像，根据正负号法则， $p_1 = -32\text{cm}$, $f'_1 = 22\text{cm}$ ，代入透镜的物像公式，

得

$$\frac{1}{p_1'} - \frac{1}{-32} = \frac{1}{22}$$

$$p_1' = 70\text{cm}$$

透镜 1 所成的实像。由于透镜 2 的存在，并不真实形成。

对于透镜 2， $f_2' = -57\text{cm}$ ，透镜 1 所成的像就是透镜 2 的物，位于透镜 2 的右侧 $(70-41)\text{ cm}$

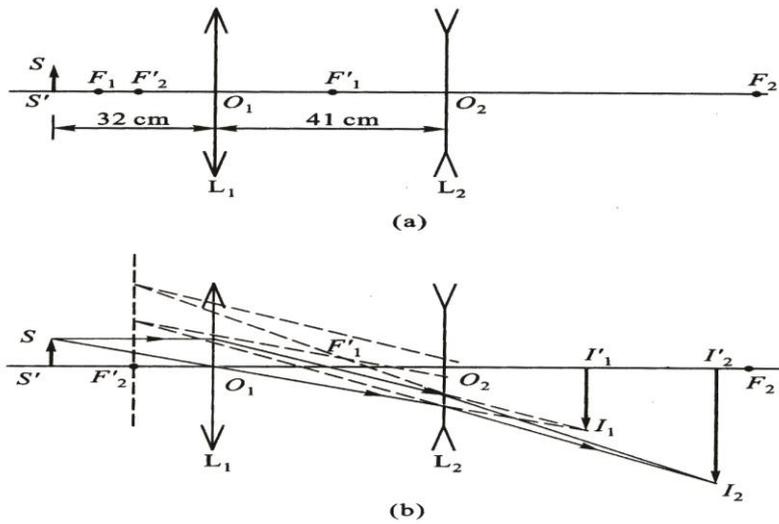


图 13-17 例 13-4 图

处，此物位于光线通过的 B 区，故为虚物，物距 $p_2 = 29\text{cm}$ 代入透镜的物像公式得

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{29} = \frac{1}{-57}$$

$$p' = 59\text{cm}$$

最后的像位于透镜 2 的右侧 59cm 处。放大倍数

$$m = m_1 m_2 = \left(\frac{p_1'}{p_1}\right) \left(\frac{p_2'}{p_2}\right) = -4.5$$

最后的像是倒像，是物体大小的 4.5 倍。图 13-17(b) 为成像的光路图。

13.6 光学仪器

13.6.1 显微镜

1 显微镜的原理光路

如图 13-18 所示, 物镜 L_o 和目镜 L_e 是两个短焦距的会聚透镜, 物体 h_o 放在物镜(靠近物的透镜)的物方焦点 F_o 外侧附近, 其所成的实像 h_i 位于目镜的物方焦点 F_e 附近并靠近目镜一侧, 通过目镜最后成一放大倒立的虚像 h'_i , 位于人眼的明视距离 S_0 (约 25cm) 附近, 这样达到显微镜观物的目的。

2 显微镜的放大率 (视角放大率)

由于显微镜、放大镜的作用是通过透镜放大物体对人眼的视角, 从而达到获得放大了物体像的目的。因此, 定义显微镜的**视角放大率**为 $M = \omega'/\omega$, 其中 ω 为无显微镜时物体在明视距离 S_0 处对眼睛所张的视角, 即 $\omega = h_o/S_0$, ω' 为通过目镜最后成的虚像对眼所张的视角, 它近似为前述实像对目镜的张角, 即 $\omega' = h_i/f'_e$ ($h_i < 0, f'_e > 0$)。由此

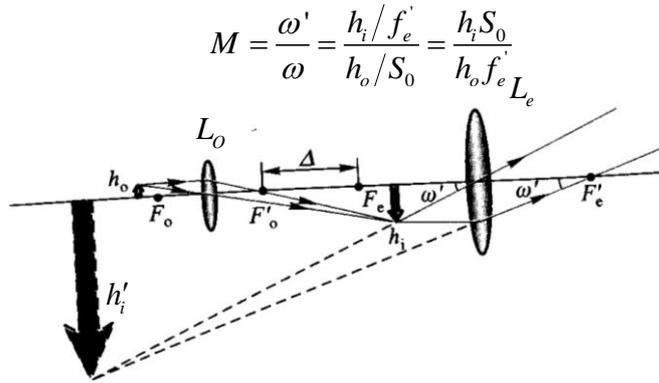


图 13-18 显微镜光路图

而物镜的横向放大率 $h_i/h_o = -\Delta/f'_o$ (Δ 为光学筒长, 即物镜像方焦点 F'_o 到目镜物方焦点 F_e 的距离, 近似等于筒长, 即物镜与目镜的距离), 于是

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = -\frac{S_0 \Delta}{f_o f'_e} = -\frac{S_0 \Delta}{f_o f_e} \quad (13-18)$$

上式表明, 物镜和目镜的焦距愈短, 光学筒长愈长, 显微镜的放大倍数愈高。为此, 在显微镜的物镜和目镜上分别刻上“10×”、“20×”等字样, 以便我们由其乘积得知所用显微镜的放大倍数。

说明 在使用式(13-18), 要注意**角度正负号规则**: 从光轴开始, 顺时针为正, 逆时针为负。这一规则同样适用于对望远镜的讨论。按此规则, 式(13-18)中, $\omega' < 0, \omega > 0$ 。

13.6.2 望远镜

1 望远镜的原理光路

如图 13-19 所示,通常物镜的像方焦点 F'_o 和目镜的焦点 F_e 几乎重合。这样从远处物体上一点射出的平行光束经物镜成像于 F'_o 点,此点同时也在目镜的物方焦平面上,所以从该像点发出的光线经目镜后又成为平行光束。眼睛靠近目镜,接收目镜出射的平行光并将其成像于视网膜上。

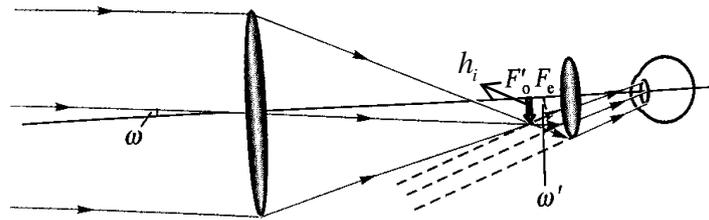


图 13-19 望远镜光路图

2 望远镜的放大率

由于物距非常大,物对眼睛所张的视角实际上与物对物镜所张的视角 ω 一样,即 $\omega = -h_i/f'_o$ (因为 $h_i < 0, f'_o > 0, \omega > 0$), 而 $\omega' = h_i/f'_e$ ($h_i < 0, f'_e > 0, \omega' < 0$), 故望远镜的放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = -\frac{f'_o}{f'_e} \quad (13-19)$$

由此可见,增大望远镜的物镜焦距 f'_o 与缩小目镜焦距 f'_e , 能显著提高望远镜的放大率。

13.6.3 照相机

照相机的功能是将远处的物体会聚成缩小的实像于感光片上,为了能清晰成像,照相机的结构为下述两种形式之一:感光片可在像方焦平面附近沿主轴移动;或者镜头(相当于凸透镜)可在底片间移动(图 13-20)。

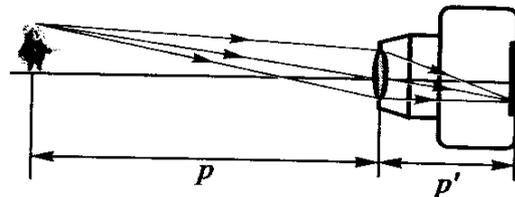


图 13-20 照相机光路图

照相机较之上述两种仪器多一个辅助部分——光阑。它设置在镜头上,其作用有二:

一是影响底片接受的光通量；二是影响景深。景深是照相机允许清晰成像的物点前后空间的范围。一般来说光阑直径大，曝光量大，但景深短；光阑直径小，曝光量小，但景深长。不过曝光量的控制还可以利用快门调节曝光时间来达到。总之，在使用照相机时，应充分兼顾这三者之间的关系，做出恰当的调配。