第 27 讲 高斯定理　电场力的功

教学要求：

理解环路定理及应用； 掌握高斯定理及其应用，电场力的功的计算。

重点与难点：

重点：高斯定理及其应用。

难点：高斯面的选取。

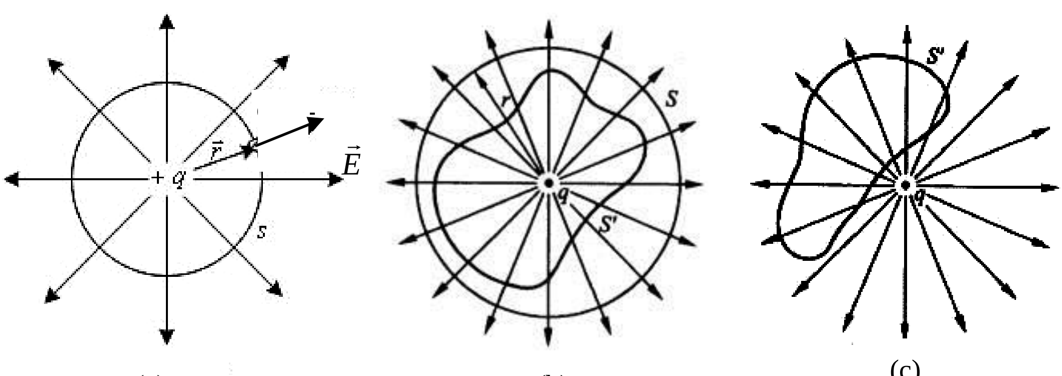
9.2.3 高斯定理

高斯定理是静电场中的一条基本定理，它给出了静电场中通过任意闭合曲面的电通量与闭合曲面内部所包围的电荷之间的量值关系。

先讨论点电荷电场的情况。以点电荷q为球心、半径为 r 包围点电荷q的闭合曲面为球面S，如图 9-14（a）。我们知道，球面上各点的电场强度$\vec{E}$的大小都是$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，方向都是沿着矢径$\vec{r}$的方向，因而处处与球面垂直。根据点电荷电场公式和闭合曲面电场强度通量计算公式，可得通过这个球面的电通量为

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos 0^o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_S \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

即通过球面的电通量与半径r无关，只与它所包围的电荷的电量有关。这表明以点电荷q为中心的任何一个球面上的电通量都是相等的。从电场线的观点看来，若q为正电荷，从它发出并穿出球面的电场线条数为$\Phi_E = q/\varepsilon_0$条；若q为负电荷，则穿入球面并汇聚于它的电场



(a)　　(b)　　(c)

图 9-14 高斯定理推导用图

线条数为$\Phi_E = q/\varepsilon_0$条。

如果包围点电荷q的曲面是任意形状的闭合曲面S'，如图 9-14（b）。可以在S'外面加一个以点电荷q为中心的球面S，由于电场线的连续性，穿过S与S'的电场线条数完全一样，即通过任意形状的包围点电荷q的闭合曲面电通量仍为$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$。

其次讨论点电荷q在闭合曲面S'之外的情况，如图 9-14（c）。因为只有与闭合曲面S'相切的锥体范围内的电场线才通过闭合曲面S'，则由电场线的连续性可得出，由一侧进入S'的电场线的条数一定等于从另一侧穿出S'的电场线的条数，所以净穿出S'的电场线的总条数为零，亦即通过S'的电通量为零。公式$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$仍然成立。

基于上述分析我们可以得到如下结论：在一个点电荷电场中任意一个闭合曲面S的电通量或者为q/ε_0或者为零，即

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & （S\text{ 包围点电荷 } q） \\ 0 & （S\text{ 不包围点电荷 } q） \end{cases} \tag{9-13}$$

对于一个由点电荷$q_1, q_2, \cdots, q_n$组成的任意带电体系的电场，在它们电场中的任意一点，由场强叠加原理，

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_n$$

其中$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3 \cdots, \vec{E}_n$为单个点电荷产生的电场，$\vec{E}$为总电场。这时通过任意闭合曲面$S$的总通量为

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \iint_S \vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \cdots + \Phi_{En}\end{aligned}$$

其中$\Phi_{E1}, \Phi_{E2}, \cdots, \Phi_{En}$为$q_1, q_2, \cdots, q_n$各自激发的电场穿过闭合曲面$S$的$\vec{E}$通量。由上述关于单个点电荷的结论(式 9-12)可知，当q_i在封闭曲面内时，$\Phi_{Ei} = q_i/\varepsilon_0$；当$q_i$在封闭曲面外时，$\Phi_{Ei} = 0$，所以有

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \tag{9-14a}$$

如果电场是由连续分布的电荷所激发的，则式(9-14)可写成

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\varepsilon_0} \tag{9-14b}$$

其中 ρ 为电荷体密度，V 为闭合曲面 S 所包围的体积。

通过真空中的静电场中任一闭合曲面的电通量 Φ_E 等于包围在该闭合曲面内的电荷代数和 $\sum q_i$ 的 ε_0 分之一，而与闭合曲面外的电荷无关. 这就是静电场的高斯定理。高斯定理中所说的闭合曲面通常称为高斯面。

关于高斯定理的几点讨论 1. 高斯定理表达式左边的场强 $\vec{E}$ 是曲面上各点的场强，它是由**全部电荷**（既包括闭合曲面内又包括闭合曲面外）共同产生的合电场，并非只由闭合曲面内的电荷产生。

2. 通过闭合曲面的总电通量由它所包围的电荷决定，闭合曲面外的电荷对总电通量没有贡献。

3. 高斯定理反映了静电场最基本性质之一：**静电场是有源场**。电场线起始于正电荷，终止于负电荷的。

4. 高斯定理和库仑定律都是静电场的基本规律。对静电场来说，两者并不是互相独立的，而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律。本节我们利用库仑定律和叠加原理导出了高斯定理，实际上也可以把高斯定理作为基本定律结合空间的各向同性而导出库仑定律，但在研究**运动电荷**的电场或一般随时间变化的电场时，库仑定律不再成立，而高斯定理依然有效。

9.2.4 高斯定理的应用

当电荷分布具有特殊对称性时, 可以应用高斯定理方便地计算电场分布。如球对称性:如点电荷,均匀带电球面或球体等；轴对称性:如无限长均匀带电直线,无限长均匀带电圆柱体或圆柱面等；面对称性: 无限大均匀带电平面或平板等。

应用高斯定理解题步骤

1. 根据电荷分布的对称性,分析场强分布的对称性。

2. 选取合适的通过待求场强$\vec{E}$的场点的高斯面S。高斯面是简单的几何闭合面(通常是球面或圆柱面);在S面上欲求$\vec{E}$之处使$E=$常量，$\vec{E}$与$\mathrm{d}\vec{S}$夹角$\theta=0^0$或常数，从而积分$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$中的$\vec{E}$能以标量形式从积分号内提出来，而不需求$\vec{E}$之处使$\theta=90^0$

（$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\cos\theta\mathrm{d}S=0$）。

3. 分别求出通过高斯面的的电通量和高斯面内的电荷。

4. 由高斯定理求电场强度。

例 9-7 求均匀带电球面的电场分布。已知球面半径为 R，所带总电量为 q（设 $q>0$）。

解 对称性分析 电荷分布是球对称的,不论 P 点是在球面内或球面外,相对于球心 O 与 P 的连线 OP，在球面上都存在与它对称的一对对电荷元$\mathrm{d}q$和$\mathrm{d}q'$，每一对电荷元在 P 点处激发的垂直 OP 的场强分量，因方向相反而相互抵消，所以 P 点的总场强$\vec{E}$一定是沿 OP 的连线（即沿半径方向向外），并且，在任何与带电球面同心的球面上各点的场强的大小都相等。

选取高斯面 无论 P 点是在球面内或球面外，总选择以 O 为球心，O 到场点 P 的距离 r 为半径的球面为高斯面。球面上每个面元$\mathrm{d}\vec{S}$上的场强$\vec{E}$的方向都和面元矢量的方向（法向）相同且大小不变（如图 9-15）。

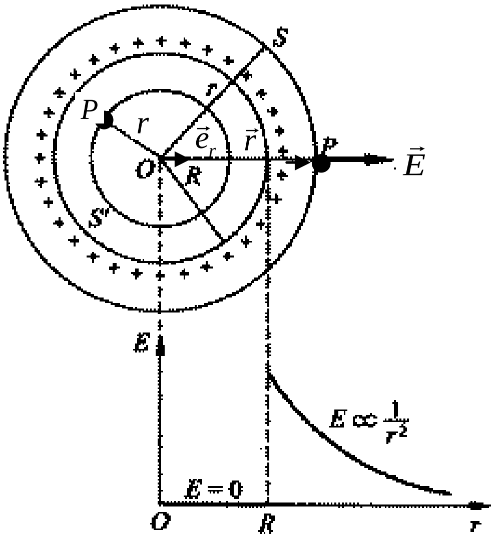


图 9-15 均匀带电球面的场强

计算电通量和电荷

电通量

$$\Phi_E=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S E\mathrm{d}S=E4\pi r^2$$

P 点在球面外 $$\sum_i q_i=q$$

高斯定理给出 $$E\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

由此式得出 $$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

考虑到$\vec{E}$的方向，可得电场强度的矢量式为

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \quad (r>R)$$

此结果说明，均匀带电球面外的场强分布正像球面上的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷的场强分布一样。

对球面内部任一点 P, $\sum_i q_i = 0$

由高斯定理 $E = 0$（$r < R$）

这表明：均匀带电球面内部的场强处处为零。根据上述结果，可画出场强大小随距离的变化曲线 $E - r$ 曲线（如图 9-15 所示）。从 $E - r$ 曲线中可看出，场强的值在球面（r=R）上是不连续的。

例 9-8 求无限长均匀带电直线的电场分布。已知直线上电荷线密度为 λ。

解 对称性分析 考虑离直线距离为 r 的一点 P 处的场强 $\vec{E}$（如图 9-16），由于带电直线为无限长，且均匀带电，所以其电场分布应具有轴对称性，因而 P 点的电场方向唯一的可能是垂直于带电直线而沿径向，和 P 点在同一圆柱面（以带电直线为轴）上的各点的场强的方向也都应该沿着径向，而且场强的大小应该相等。

选取高斯面 以带电直线为轴，作一个通过 P 点，高为 l 的圆筒形封闭面为高斯面 S(图 9-16)。

计算电通量和电荷：

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{上底}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\text{下底}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

在 S 面的上、下底面，场强方向与底面平行，因此上式等号右侧后面两项等于零。而在侧面上各点电场的方向与各点的法线方向相同，所以有

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \iint_{\text{侧面}} \mathrm{d}S = E \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷 $\sum_i q_i = \lambda l$

由高斯定理得 $E \cdot 2\pi r l = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

由此得 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

或 $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

$\vec{e}_r$ 为沿着以直导线为轴的圆柱半径方向的单位矢量。

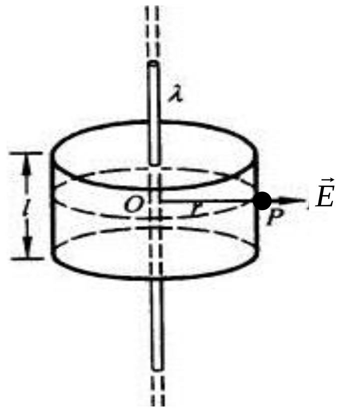


图 9-16 无限长的均匀带电直线的场强

例 9-9 求无限大均匀带电平面的电场分布，已知带电平面上电荷面密度为 σ。

解 对称性分析 无限大均匀带电平面的电场分布应满足平面对称。考虑距离带电平面为 r 的场点 P 的场强 $\vec{E}$（如图 9-17 所示）。由于电场分布应满足平面对称，所以 P 点的场强必然垂直于该带电平面，而且离平面等远处（同侧或两侧）的场强大小都相等，方向都垂直于平面指向远离平面的方向（当 $\sigma>0$ 时）。

选取高斯面 我们选一个轴线垂直于带电平面的封闭的柱面作为高斯面 S，带电平面平分此柱面，而 P 点位于它的一个底面上。

计算电通量和电荷：

$$\Phi_E=\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{侧面}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\iint_{左}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\iint_{右}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由于柱面的侧面上各点的 $\vec{E}$ 与侧面平行所以通过侧面的电通量为零，因而只有通过两底面的电通量。以 ΔS 表示一个底的面积，则

$$\Phi_E=\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{左}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\iint_{右}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint_{左}EdS\cos 0^o+\iint_{右}EdS\cos 0^o=2\Delta SE$$

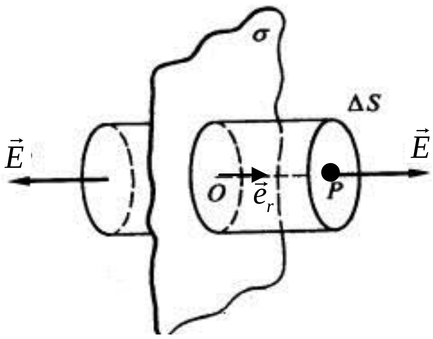


图 9-17 无限大均匀带电平面的电场

而

$$\sum_i q_i=\sigma\Delta S$$

高斯定理给出

$$2E\Delta S=\sigma\Delta S/\varepsilon_0$$

从而

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

此结果说明，无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀场。这一结果与使用叠加原理计算的结果相同。

例 9-10 试求半径为 R，电荷面密度为 σ 的无限长均匀带电圆柱面的场强，如图 9-19 所示。

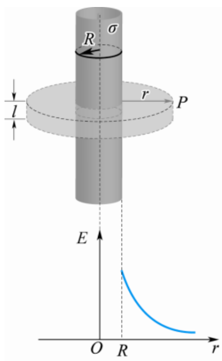
解：

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=2\pi rlE$$

$$\because \sum q=\sigma 2\pi Rl$$

$$\therefore E=\frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}(r>R)$$

令 $\lambda=2\pi R\sigma$



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

图 9-19 例 9-10 图

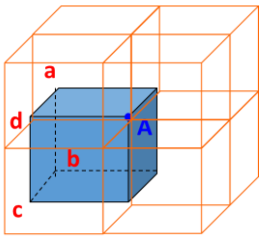
同理圆柱面内任一点　E=0

课堂训练：带等量异号电荷的两块无限大均匀带电平面的电场分布：

解：均匀带电平面外：$E_{外}=0$

两带电平面之间：$E_{内}=E_{+}+E_{-}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$

课堂训练：如图，一点电荷 q 位于立方体的 A 角上，则通过 abcd 面的 E 通量 Φ_e 是多少?



解:先假设点电荷 q 位于立方体中心,则通过每一侧面的通量都为总通量 $\Phi_e=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$的$\dfrac{1}{6}$。作 7 个体积相同的立方体，使 A 点位于一个大立方体的正中。所以通过 abcd 的通量为

$$\frac{q}{24\varepsilon_0}$$

9.3 电场力的功

在力学中,我们曾论证了保守力—万有引力和弹性力对质点做功只与起始和终了位置有关,而与路径无关这一重要特性,并由此引入相应的势能概念.那么静电场力—库仑力的情况怎样呢?是否也是保守力,从而能引入电势能的概念?

9.3.1 电场力的功

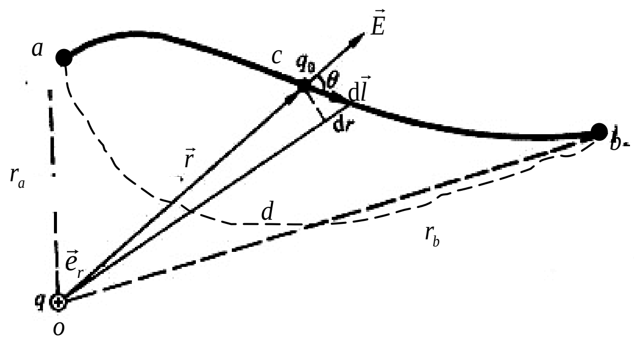


图 9-20 静电场力做功的计算

在点电荷 q 的电场中，试探电荷 q_0 沿任意路径 acb 由 a 点运动到 b 点，如图 9-20 所示。在 c 处，q_0 有位移 $\mathrm{d}\vec{l}$，静电力 $\vec{F}$ 对 q_0 的元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

其中 $\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}r$，代入上式得

$$\mathrm{d}W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

当试探电荷 q_0 由 a 点运动到 b 点时，电场力的功为

$$W = \int \mathrm{d}W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right] \tag{9-15a}$$

式中 r_a 和 r_b 分别为试探电荷 q_0 的起点和终点距点电荷 q 的距离。可见，在静止点电荷 q 的电场中，电场力对试探电荷 q_0 所做的功，只与位移路径的起点 a 和终点 b 的位置有关，而与路径无关。

上述结论可以推广任意带电体产生的电场。任何一个带电体都可看作由许多点电荷组成的点电荷系。设 q_0 在点电荷系 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的电场中由 a 点沿任意路运动到 b 点时，由场强叠加原理，静电场力的功为：

$$\begin{aligned} W &= \int_{ab}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\overline{ab}} q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab} q_0\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{ab} q_0\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \int_{ab} q_0\vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right) \end{aligned} \tag{9-15b}$$

式中 r_{ai}，r_{bi} 分别表示路径的起点和终点距点电荷 q_i 的距离。上式表明，功仍只取决于路径的始、末二位置，而与路径无关，由此得出如下结论：试探电荷在任何静电场中移动时，电场力所作的功，只与电场的性质，试探电荷所带电量的大小及路径的起点和终点的位置有关，而与路径无关。静电场的这一特性称为静电场的保守性，即静电场是保守场，静电力是保守力。

9.3.2 静电场的环路定理

静电场力所作的功与路径无关的特性还可用另一种形式来表达。设试探电荷 q_0，在静电场中 a 点经过任意闭合路径(如图 9-20 中 $acbda$)又回到 a 点的位置，则电场力在整个闭合路径 $acbda$ 上做功为 $\oint_L q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$

因为试探电荷$q_0 \neq 0$,所以上式也可写成 $$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad (9\text{-}16)$$

式（9-16）左边是电场强度$\vec{E}$沿任意闭合路径的线积分，称为电场强度$\vec{E}$的环流。它表明在静电场中，电场强度$\vec{E}$的环流恒等于零，这一结论叫做静电场的环路定理。它是静电场为保守场的数学表述。由于这一性质，我们才能引进电势能和电势的概念。

作业：9、10、11