

第 26 讲 电场 电场强度 电通量

教学要求:

了解电荷的量子化。理解带电体、点电荷、正、负电荷、电性力、电荷守恒定律、电场力的叠加原理、库仑定律及应用；场的观点、试探电荷、电场力、静电场、电偶极子定义、电场线、电场强度及其计算；掌握电场强度通量。

重点与难点:

重点: 电场强度及其计算。

难点: 电场强度通量计算。

9.1 电场 电场强度

9.1.1 电荷

电荷的概念是从物体带电的现象中产生的。美国物理学家富兰克林首先以正电荷、负电荷的名称来区分两种电荷，并规定丝绸摩擦过的玻璃棒上的电荷为正电荷，毛皮摩擦过的硬橡胶棒上的电荷为负电荷。同种电荷相斥，异种电荷相吸，静止电荷之间的相互作用力称为静电力。根据带电体之间相互作用力的大小能够确定物体所带电荷的多少。带电体所带电荷的多少叫电量。电量常用 Q 或 q 表示，在国际单位制中，其单位名称为库 [仑] (C)。正电荷电量取正值，负电荷电量取负值。

由物质的分子结构知识可知，正常状况下原子中电子总数和质子总数相等，原子呈电中性，这时物体中任何一部分所包含的电子总数和质子总数相等，对外界不显示电性。如果由于某种原因，使物体内电子不足或过多，则物体分别带正电或负电。在一个孤立的系统内，无论发生怎样的物理过程，正负电荷的代数和保持不变，这就是电荷守恒定律。电荷守恒定律是自然界的基本守恒定律之一，无论在宏观领域，还是在微观领域都是成立的，如核反应和粒子的相互作用过程。

迄今为止，所有实验证明，在自然界中，任何带电体所带电量都是**基本**电量 $e=1.602\ 176\ 48(40)\times 10^{-19}\text{C}$ 的整数倍。这种电量只能取分立的、不连续的量值的性质称为电荷的量子性。因为 e 如此之小，以致使电荷的量子性在研究宏观现象的绝大多数实验中未能表现出来，因此常把带电体当作电荷连续分布的带电体来处理，并认为电荷的变化是连续的。1964 年，盖尔曼 (M. Gell-Mann) 从理论上预言基本粒子由若干**夸克**或**反夸克**组成，每一个夸克或反夸克

可能带有 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的电量。然而至今尚未在实验中发现单独存在的夸克。

实验证明一个物体所带总电量与它的运动状态无关。例如，加速器将电子或质子加速时，随着粒子速度的变化，电量没有任何变化。大量事实证明，电荷的电量是与其运动状态无关。在不同的参考系观察，同一带电粒子的电量不变，电荷的这一性质叫电荷的相对论不变性。

9.1.2 库仑定律

两个静止电荷之间的相互作用力即静电力，不仅与它们所带电量及它们之间的距离有关，而且还与它们的大小、形状及电荷分布情况有关。当一个带电体本身的线度比所研究的问题中所涉及的距离小很多时，带电体可以看作点电荷。即带电体的大小、形状及电量分布等诸多因素均可忽略，而把带电体所带电量集中到一个“点”上。

在真空中两静止点电荷之间的相互作用力的大小与这两个点电荷所带电量 q_1 和 q_2 乘积成正比

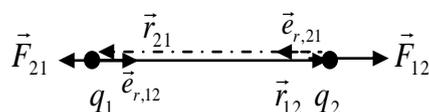


图 9-1 两个静止点电荷之间的相互作用力

比，与它们之间距离 r 的平方成反比，作用力的方向沿着两个点电荷的连线，同性相斥、异性相吸。

这就是库仑定律。它是 1785 年由法国物理学家库仑提出的。数学表达式为： q_2 受 q_1 的作用力：

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r,12} \quad (9-1)$$

其中 q_1 、 q_2 分别表示两个点电荷的电量（带有正负号）， $\vec{e}_{r,12}$ 表示从 q_1 指向 q_2 的矢量 \vec{r}_{12} 的单位矢量（如图 9-1）， k 为比例系数，采用国际单位制，

$$k \approx 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

为了使由库仑定律推导出的一些常用公式简化，我们引入新的常量 ϵ_0 来代替 k ，两者的关系为

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2) \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

ϵ_0 称为**真空电容率**，也称**真空介电常量**。

库仑定律写成：

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{r,12} \quad (9-2)$$

说明 1. q_2 对 q_1 的作用力为

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{r,21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} (-\vec{e}_{r,12}) = -\vec{F}_{12}$$

即两个静止点电荷之间的相互作用力符合牛顿第三定律。

2. 当 q_1 与 q_2 同号时, \vec{F}_{12} 与 $\vec{e}_{r,12}$ 同方向, 表明 q_2 受 q_1 的斥力, 当 q_1 与 q_2 异号时, \vec{F}_{12} 与 $\vec{e}_{r,12}$ 方向相反, 表明 q_2 受 q_1 的引力 (图 9-1)。

3. 库仑定律是从实验总结出来的规律, 在 r 从 $10^{-17} \sim 10^7 \text{ m}$ 的广大范围内正确、有效。它是经典电磁理论的基石, 以它为基础将导出其它重要的电场方程。

4. 在库仑定律中引入真空介电常量 ϵ_0 和 “ 4π ” 因子的做法, 通常称之为单位制的有理化, 它可使以后经常用到的电磁学规律的数学表达式不出现 “ 4π ” 因子而变得简单些。

9.1.3 电场强度

库仑定律表明, 真空中相互隔开的点电荷也可以发生相互作用。法拉第首先提出, 带电体周围都存在一种特殊物质—电场, 电荷和电荷之间是通过电场这种物质传递相互作用的, 这种作用可以表示为

$$\text{电荷} \longleftrightarrow \text{电场} \longleftrightarrow \text{电荷}$$

理论和大量实验证明场的观点是正确的。电磁场是物质存在的一种形态, 它分布在一定范围的空间, 并和一切物质一样, 具有能量、动量、质量等属性。电磁场的运动 (传播) 速度是有限的, 这个速度就是光速。但场与其它实物不同, 几个电场可以同时占有同一空间, 所以电场是一种特殊形式的物质。

相对于观察者为静止的带电体周围存在的电场称为静电场, 静电场对外表现主要有:

- 1 处于电场中的任何带电体都受到电场所作用的力。
- 2 当带电体在电场中移动时, 电场所作用的力将对带电体做功。

本章讨论的是静电场的性质及其分布规律。

电场的基本特征是对处于其中的任何电荷都有电场力的作用。从这一性质出发, 我们可以引入电场强度概念来描述电场。

假设空间有一静止不变的场源电荷 (可以是点电荷、点电荷系或带电体), 它在周围空间激发静电场, 为了定量地了解电场中任一点处电场的性质, 可利用一个试探电荷 q_0 放到电场

中各点, 观测 q_0 受到的作用力。试探电荷所带的电量应充分小, 使它引入电场后不会显著改变原电场的分布; 同时其几何线度应充分小到可以被看作点电荷, 以便能用它来确定场中每一点的性质。实验发现, 同一试探电荷在场中不同点, 其受力的大小和方向一般不相同。对于电场中任一固定点, 电荷 q_0 变化时, q_0 所受的力的方向不变, 大小随之改变, 但 $\frac{\vec{F}}{q_0}$ 保持为恒定, 反映了电场本身的性质。我们用 $\frac{\vec{F}}{q_0}$ 定义电场中某点的电场强度, 简称场强, 用 \vec{E} 表示, 即

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (9-3)$$

即, 电场中任一点(场点)的电场强度等于单位正电荷在该点所受的电场力。电场强度的单位为牛/库(N/C)或伏/米(V/m)。

说明 1. 电场强度是电场的属性, 与试探电荷是否存在无关。

2. 电场强度是矢量, 当 q_0 为正时, 其方向与电场力 \vec{F} 的方向相同; 当 q_0 为负时, 其方向与电场力 \vec{F} 的方向相反。

3. 在已知静电场中各点电场强度 \vec{E} 的情况下, 可由式(9-3)求出置于其中任意点处的点电荷 q 受的力

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

9.1.4 电场强度叠加原理

试探电荷 q_0 放到由 n 个点电荷组成的电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n 所产生的电场时, q_0 将受到各点电荷的静电力的作用, 由静电力的叠加原理知, q_0 受到的总静电力:

两边除以 q_0 , 得

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

按电场强度的定义 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$, 有

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{n=1}^n \vec{E}_n \quad (9-4)$$

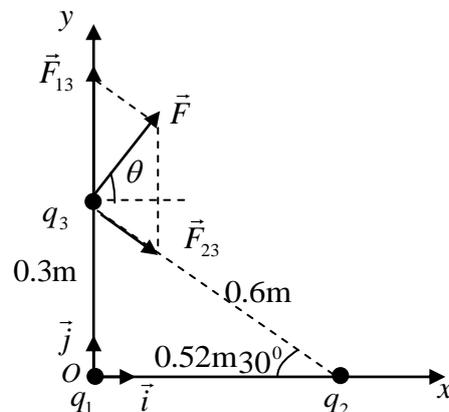


图 9-3 求作用在 q_3 上的合力

上式表明, 电场中任一场点处的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自产生的场强的矢量和. 这就是电场强度叠加原理. 任何带电体都可以看作许多点电荷的集合, 由该原理可计算任意带电体产生的电场强度。

例 9-1 如图 9-3, 在直角坐标系的原点 (0, 0) 及离原点 0.52m 的 x 轴上 (0.52, 0) 点处和离原点 0.3m 的 y 轴上 (0, 0.3) 点处分别放置 $q_1 = 50\mu\text{C}$, $q_2 = -86\mu\text{C}$, $q_3 = 65\mu\text{C}$ 的点电荷. 求作用在 q_3 上合力的大小和方向。

解 $0.3^2 + 0.52^2 = 0.6^2$

q_3 受 q_1 的作用力 \vec{F}_{13} 的大小为

$$F_{13} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{(65 \times 10^{-6}) \times (50 \times 10^{-6})}{(0.3)^2} = 325(\text{N})$$

$$\vec{F}_{13} = F_{13x}\vec{i} + F_{13y}\vec{j} = 325\vec{j}\text{N}$$

q_3 受 q_2 的作用力 \vec{F}_{23} 的大小为

$$F_{23} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{(65 \times 10^{-6}) \times (86 \times 10^{-6})}{(0.6)^2} = 140(\text{N})$$

$$\vec{F}_{23} = F_{23x}\vec{i} + F_{23y}\vec{j} = F_{23} \cos 30^\circ \vec{i} - F_{23} \sin 30^\circ \vec{j} = (121\vec{i} - 70\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (F_{13x} + F_{23x})\vec{i} + (F_{13y} + F_{23y})\vec{j} = (121\vec{i} + 255\vec{j})\text{N}$$

合力 \vec{F}_3 的大小为 $F_3 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{121^2 + 255^2} = 282.3(\text{N})$

和 x 轴的夹角为: $\tan \theta = \frac{F_{3y}}{F_{3x}} = \frac{255}{121} \quad \theta = 64.6^\circ$

9.1.5 电场强度的计算

如果场源电荷分布状况已知, 那么根据电场强度叠加原理, 原则上可以求得电场分布。

1 点电荷的电场强度

设在真空中有一个静止的点电荷 q , 根据库仑定律放在场点 P 的试探电荷 q_0 受的力

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

\vec{e}_r 是从源电荷 q 指向 P 点的矢量 \vec{r} 的单位矢量. 则点电荷 q 在 P 点的场强

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (9-5)$$

由式(9-5)可知, 如果 $q > 0$, P 点的场强 \vec{E} 与 \vec{e}_r 的方向相同, $q < 0$, 与 \vec{e}_r 的方向相反, 如图 9-4 所示。

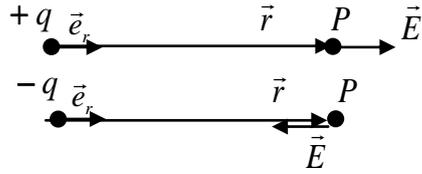


图 9-4 静止点电荷的电场强度

2 点电荷系的电场强度

设在真空中有 n 个点电荷组成的电荷系 q_1, q_2, \dots, q_n , 要求这些点电荷在空间任一点 P 产生的场强。用 \vec{e}_{ri} 表示从电荷 q_i 指向 P 点的矢量 \vec{r}_i 的单位矢量。 \vec{E}_i 为 q_i 单独存在时在 P 点产生的电场强度, 则

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

根据电场强度叠加原理, 可得点 P 的总电场强度:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri} \quad (9-6)$$

3 电荷连续分布的带电体的电场强度

若带电体的电荷是连续分布的, 可以认为该带电体的电荷分割成许多无限小的电荷元 dq 组成的, 而每个电荷元可以看成点电荷, 其中任一电荷元 dq 在场点 P 产生的场强 $d\vec{E}$ 为

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

式中 r 是电荷元 dq 到场点 P 的距离, \vec{e}_r 为 dq 指向场点 P 的单位矢量。整个带电体在 P 点产生的总场强可用积分计算为

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (9-7)$$

由此可得连续分布电荷的电场强度的计算思路

(1) 在带电体上任取一电荷元, 按以下方式确定其大小。

对于电荷体分布: $dq = \rho dV$, ρ 为电荷体密度, 单位 C/m^3 。

对于电荷面分布: $dq = \sigma dS$, σ 为电荷面密度, 单位 C/m^2 。

对于电荷线分布: $dq = \lambda dl$, λ 为电荷线密度, 单位 C/m 。

(2) 选取适当的坐标系, 由 $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ 求出 dq 在场点 P 产生的电场强度 $d\vec{E}$,

并投影到直角坐标系的各轴上, 即写出 dE_x 、 dE_y 和 dE_z 。

(3) 确定积分上下限, 对电场各分量分别进行积分计算。在计算过程中要注意根据对称性来简化计算过程, 即如果由电荷分布的对称性可分析出总场强的方向, 则只需求出电荷元的电场强度在此方向上的分量之和。

(4) 必要时进行讨论。

9.1.6 带电体在外电场中所受的作用

点电荷 q 放在电场强度为 \vec{E} 的外电场中某一点时, 电荷受静电力

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (9-8)$$

要计算一个带电体在电场中受到的作用, 一般要把带电体划分为许多电荷元, 先计算每个电荷元所受的作用力, 然后用积分求带电体所受的合力和合力矩。

例 9-2 已知电偶极子电矩为 \vec{p} , 求 (1) 电偶极子轴线延长线上一点 A 的场强 \vec{E}_A ; (2) 电偶极子轴线中垂线上一点 B 的场强 \vec{E}_B 。

解 (1) 如图 9-5 所示, 取电偶极子轴线的中坐标原点 O , 沿 \vec{p} 的方向为 x 轴, 轴线上任意点的距离为 r , 则 $+q$ 和 $-q$ 在 A 点的产生的电场强

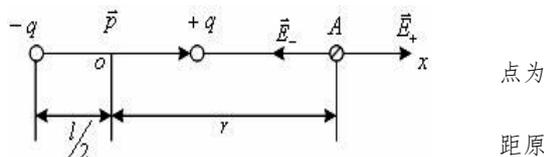


图 9-5 电偶极子轴线上的场强

\vec{E}_+ 和 \vec{E}_- 同在轴线上,

$$\begin{aligned} \vec{E}_+ &= \frac{q\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} & \vec{E}_- &= -\frac{q\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \\ \vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_- &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \vec{i} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \vec{i} = \frac{ql\vec{i}}{2\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2} \end{aligned}$$

对于电偶极子，有 $r \gg l$ ，并考虑到 \vec{E}_A 的方向与电偶极矩 \vec{p} 方向相同 ($\vec{p} = ql\vec{i}$)，将上式写成

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

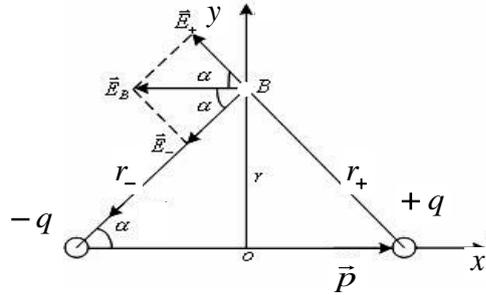


图 9-6 电偶极子轴线中垂线上的场强

(2) 如图 9-6 所示，取电偶极子轴线的中点为坐标原

点，沿 \vec{p} 的方向为 x 轴，中垂线为 y 轴，中垂线上任一点 B 到原点 O 的距离为 r，到 $-q$ 和 $+q$ 的距离分别为 r_+ 和 r_- ，且 $r_+ = r_-$ 。

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)}$$

\vec{E}_+ 和 \vec{E}_- 的矢量式分别为

$$\vec{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)} \cos \alpha \vec{i} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)} \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{E}_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)} \cos \alpha \vec{i} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)} \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{E}_B = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{2^2} \right)} \cos \alpha \vec{i}$$

$$= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)^2} \cdot \frac{\frac{l}{2} \vec{i}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{-ql\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

对于电偶极子，有 $r \gg l$ ，且 $\vec{p} = ql\vec{i}$ ，可将上式写成

$$\vec{E}_B = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

例 9-3 电荷 q (设 $q > 0$) 均匀分布在半径为 R 的细圆环上, 计算在环的轴线上与环心相距 x 的 P 点的场强。

解 如图 9-7, 以圆环中心 O 为坐标原点, 过环心垂直环面的轴线为 x 轴, 在圆环上任取线元 dl , 其带电量为 dq , 在 P 点的场强为 $d\vec{E}$, $d\vec{E}$ 沿平行和垂直于轴线的两个分量分别为 $dE_{//}$ 和 dE_{\perp} 。由于圆环均匀带电, 圆环上全部 dq 的 dE_{\perp} 分量均抵消, 对总场强有贡献的是平行轴线的分量 $dE_{//}$,

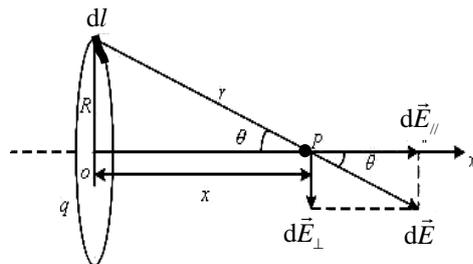


图 9-7 均匀带电细圆环轴上的场强

$$dE_{//} = dE \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$$E = \int dE_{//} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dq$$

由 $\oint dq = q$ 得

$$E = \frac{\cos \theta q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

将 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ 代入得

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

\vec{E} 的方向沿着轴线指向远方。

当 $x \gg R$ 时, $(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \approx x^3$, 则 \vec{E} 的大小为

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

此结果说明, 远离环心的电场也相当于一个点电荷 q 所产生的电场。

例 9-4 有一均匀带电直线, 长为 l , 总电量为 q , 线外一点 P 离开直线的垂直距离为

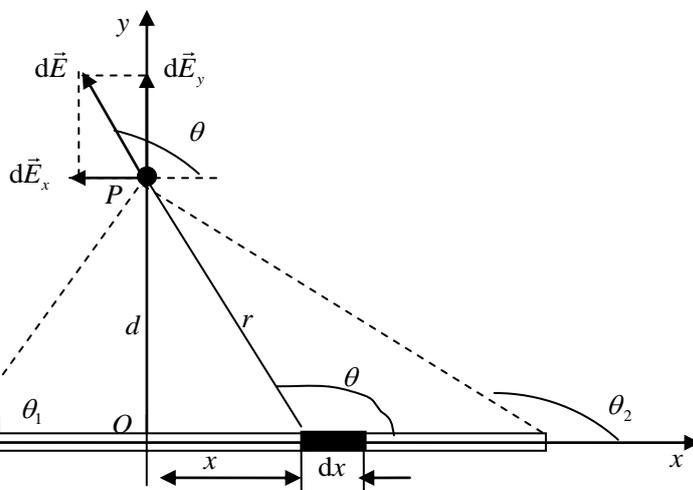


图 9-8 均匀带电直线外任一点处的场强

d 处, P 点和直线两端的连线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 (图 9-8)。求 P 点的电场强度。

解 取 P 点到直线的垂足 O 为原点, 坐标轴 Ox 沿带电直线, Oy 轴通过 P 点如图 9-8。设线电荷密度为 λ ($\lambda = q/l$), 把带电体分成一系列点电荷, 则离原点为 x 处的电荷元 $dq = \lambda dx$ 在 P 处产生场强 $d\vec{E}$

的大小为

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

r 是 dx 到 P 点的距离。设 $d\vec{E}$ 与 x 轴之间的夹角为 θ , 则 $d\vec{E}$ 沿 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$dE_x = dE \cos \theta, \quad dE_y = dE \sin \theta$$

图中 z 轴未画出, 显然 $dE_z = 0, E_z = \int dE_z = 0$ 。从图可知,

$$x = d \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -d \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -d \cot \theta$$

$$dx = d \csc^2 \theta d\theta \quad r^2 = d^2 + x^2 = d^2 \csc^2 \theta$$

所以

$$dE_x = \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad dE_y = \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

其矢量表达式为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{j} \end{aligned}$$

其方向可用 \vec{E} 与 x 轴的夹角 α 表示

$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_x}$$

讨论 如果这一均匀带电直线是无限长的, 即

$\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 那么

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{j}$$

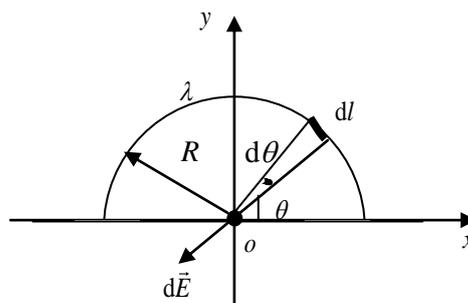


图 9-9 均匀带电半圆环圆心处的场强

即无限长均匀带电直线附近某点的场强 \vec{E} 与该点离直线的距离 d 成反比, 如 $\lambda > 0$, 电场的方向垂直于带电直线而指向远离直线的一方, $\lambda < 0$, 电场的方向垂直于带电直线而指向直线的一方。

例 9-5 若将一均匀细棒弯成一半径为 R 的半圆环, 且均匀带正电, 电荷线密度为 λ ($\lambda > 0$), 试求圆心 O 处的场强。

解 以圆心 O 为坐标原点, 通过半圆环两端点的直线为 x 轴, 过圆环中点的直径为 y 轴, 建立如图 9-9 所示的直角坐标系。在角坐标 θ 处, 取长度为 $d\mathbf{l} = R d\theta$ 的带电微元, 则其所带电量 $dq = \lambda d\mathbf{l} = \lambda R d\theta$ 。

dq 在圆心处所产生的电场强度的大小为

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

则 $d\vec{E}$ 沿 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$dE_x = -dE \cos \theta = -\frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta \quad dE_y = -dE \sin \theta = -\frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta$$

$$E_x = \int dE_x = -\int_0^\pi \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta \Big|_0^\pi = 0$$

实际上, 由于半圆环均匀带电, 圆环上全部 dq 的 dE_x 分量均抵消, 直接可知 $E_x = 0$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta \Big|_0^\pi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{j}$$

例 9-6 计算电偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 在均匀外电场 E 中所受的合力和合力矩。

解 如图 9-10 所示, 电矩 p 的方向与 E 的方向之间夹角为 θ , 则正、负点电荷受力分别为

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_- = -q\vec{E}$$

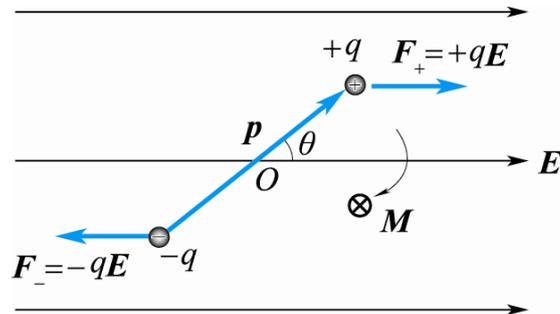


图 9-10 例 9-6 图

合力 $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$

力偶矩的大小为 $M = F_+ \frac{l}{2} \sin \theta + F_- \frac{l}{2} \sin \theta = Fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin \theta$

考虑到力矩 M 的方向，上式写成矢量式为

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$$

所以电偶极子在电场作用下总要使电矩 p 转到 E 的方向上，达到稳定平衡状态。

9.2 电通量 高斯定理

9.2.1 电场的图示法 电场线

1 电场线

为了形象描述场强在空间的分布情况，可以引入电场线概念。电场线是按下列规定在电场中画出的一系列假想的曲线：曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向，曲线的疏密表示场强的大小。定量地说，为了表示电场中某点场强的大小，设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元 dS_{\perp} ，如图 9-11 所示，通过此面元画 $d\Phi_E$

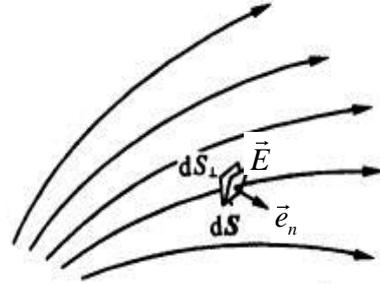


图 9-11 电场线数密度与场强大小的关系

条电场线，使得

$$E = \frac{d\Phi_E}{dS_{\perp}} \quad (9-9)$$

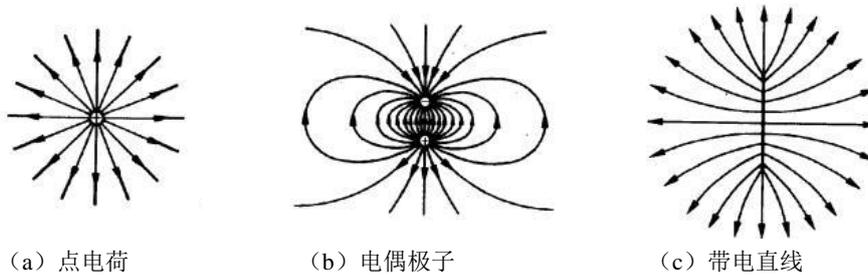


图 9-12 几种静止电荷的电场线图

图 9-12 为几种常见带电体系产生的电场的电场线。

2 静电场电场线的性质

通过对各种各样电场的电场线的观察，我们发现静电场的电场线具有如下的性质。

(1) 静电场的电场线总是永不闭合也不中断的曲线，而是起始于正电荷或无穷远，终止于负电荷或无穷远。

(2) 在没有电荷的空间内, 任何两条电场线不会相交。说明静电场中每一点的场强是唯一的。

9.2.2 电通量

通过电场中某一个面的电场线条数叫做通过该面的**电场强度通量**, 简称为**电通量**, 用 Φ_E 表示, 单位伏·米(V·m)。

匀强电场的电场线是一系列均匀分布的平行直线, 在匀强电场中取一个平面 S , 若 S 面与 \vec{E} 垂直[如图9-13(a)], 则

$$\Phi_E = ES$$

若 S 面的单位法向矢量 \vec{e}_n 与 \vec{E} 方向的夹角为 θ , 如图9-13(b), 我们考虑 S 在垂直于场强方向的投影 S_{\perp} , 那么通过 S 和 S_{\perp} 的电通量相等,

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{e}_n S = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad (9-10)$$

由式(9-10)决定的电通量 Φ_E 有正负之别。当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\Phi_E > 0$; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Phi_E = 0$, 当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, $\Phi_E < 0$ 。

计算非匀强电场中, 穿过任意曲面 S 的电通量 如图9-13(c)所示, 可将曲面 S 分割成无限多个面积元 dS , 先计算通过每一面积元 dS 的电通量, 对于曲面上面元 $d\vec{S}$, 我们引入面积元矢量 $d\vec{S} = dS\vec{e}_n$, 其中 dS 为面积元矢量的大小, \vec{e}_n 表示面积元矢量单位法向矢量, 若 S 面的单位法向矢量 \vec{e}_n 与 \vec{E} 方向的夹角为 θ , 则

$$d\Phi_E = EdS \cos \theta = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

然后对整个 S 面上所有面元的电通量相加, 即

$$\Phi_E = \iint_S EdS \cos \theta = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (9-11)$$

当曲面 S 为闭合曲面时, 上式写成

$$\Phi_E = \oiint_S EdS \cos \theta = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (9-12)$$

积分符号 \oiint_S 表示对整个闭合曲面进行面积分。

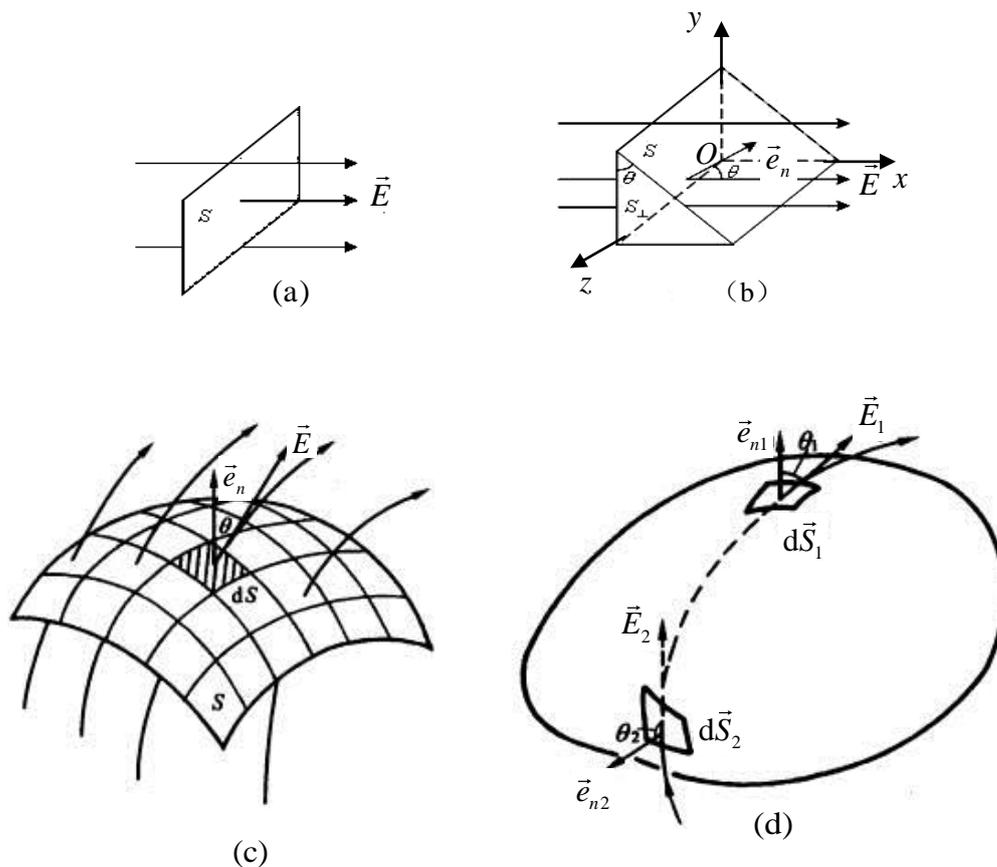


图 9-13 电通量的计算

注意 对于不闭合曲面，面上各处法向单位矢量的正向任意取这一侧或另一侧。对于闭合曲面，由于它使整个空间划分成内、外两部分，通常规定自内向外的方向为面积元法线的正方向。当电场线从内部穿出时[如在图 9-13(d)中面元 dS_1 处]，电通量为正。当电场线从外部穿入时（如图 9-13(d)中面元 dS_2 处），电通量为负。上式所表示的通过整个闭合曲面的电通量 Φ_E 就等于穿出和穿入闭合曲面的电场线的条数之差，也就是净穿出闭合曲面的电场线的总条数。

作业：4、5、7