第30讲 电容 静电场的能量　习题课

教学要求：

了解孤立导体的电容、平行板，球形，圆柱形的电容器的计算。掌握电容的串联和并联。

重点与难点：

重点：电容的串联和并联。

难点：静电场的能量。

9.7　电容　　电容器

9.7.1 孤立导体的电容

理论和实践都表明，附近没有其它导体和带电体的孤立导体，它气所带电量与它的电势成正比，即

$$q \propto U$$

写成等式

$$C = \frac{q}{U} \qquad (9\text{-}37)$$

比例系数 C 为孤立导体的电容。电容的大小仅与导体的尺寸、形状、相对位置、其间的电介质有关，与 q 和 U 无关。可以看出电容 C 是使导体升高单位电势所需要的电量，反映了导体储存电荷和电量的能力，在量值上等于两极板间的电势差为单位值时所容纳的电荷量。电容的单位为法拉(F)。在实际应用中，法拉太大，常用微法$(\mu\mathrm{F})$、皮法(pF)等作为电容的单位,$1\mathrm{F} = 10^6\mu\mathrm{F} = 10^{12}\mathrm{pF}$　。

9.7.2 电容器及其电容

当导体 A 附近有其它导体存在时，则该导体的电势不仅与它本身所带的电量有关，而

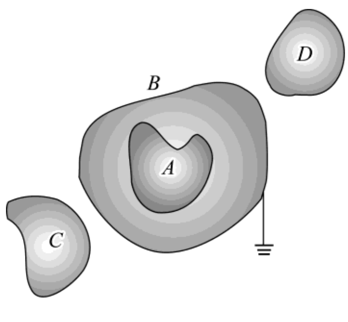


图 9-39 屏蔽的电容器

且与其它导体的形状及位置有关。为了消除周围其它导体的影响，可用一个封闭的导体壳 B

将 A 屏蔽起来，如图 9-39 所示。可以证明，导体 A 和导体 B 之间的电势 $U=V_A-V_B$ 与导体 A 所带的电量 q 成正比，不受外界影响。我们把导体壳 B 与其腔内的导体 A 所组成的导体系叫作电容器，其电容为

$$C=\frac{q}{V_A-V_B} \qquad (9\text{-}38)$$

电容器的电容 C 与两导体的尺寸、形状、相对位置、其间的电介质有关，与极板是否带有电荷无关。组成电容器的两导体叫电容器的极板。在实际应用的电容器中，对其屏蔽性要求并不很高，只要求从一个极板发出的电场线都终止在另一个极板就行。电容器可用来存储电荷和电能。

设电容器的两个极板分别带电+q 和-q，通过计算两极板之间的电场分布，由电场分布计算两极板之间的电势差 $U=V_A-V_B$， 由电容定义式（9-38）可以方便地求出几类电容器的电容公式。

1 平行板电容器

平行板电容器是靠得很近的平行板 A、B 所组成，两极板的面积均为 S，两极板内表面之间距离为 d，且板面线度远大于 d（图 9-40）。设 A 板带电+q，B 板带电-q，忽略边缘效应，两板间的电压为

$$U=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

故平板电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (9\text{-}39)$$

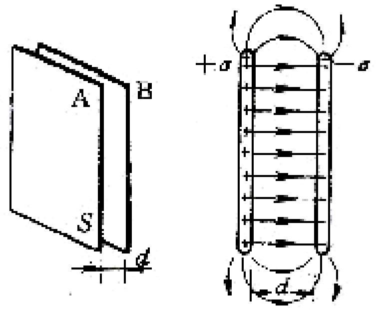


图 9-40 平行板电容器

2 圆柱形电容器

圆柱形电容器由两个同轴的金属圆筒 A、B 构成（图 9-41），两个圆筒的长度均为 L，内筒的外径为 R_A，外筒的内径为 R_B，，设 A 筒带电+q，B 筒带电-q。忽略边缘效应，电荷应各自均匀地分布在 A 筒的外表面和 B 筒的内表面上，单位长度上的电量 $\lambda=\frac{q}{L}$。由高斯定理可求得两筒之间距离轴线为 r 的 P 点处电场强度的大小为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

场强方向沿半径方向由 A 筒指向 B 筒。

$$U=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{R_\mathrm{A}}^{R_\mathrm{B}}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}$$

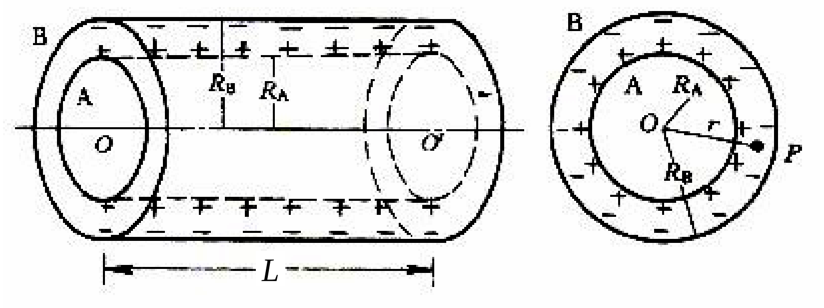


图 9-41 圆柱形电容器

故圆柱形电容器的电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}} \tag{9-40}$$

单位长度上的电容为 $$C_l=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A}}}$$

3 球形电容器

球形电容器由两个同心的导体球壳 A、B 构成（图 9-42）。设内球的外径为 R_A，外球的内径为 R_B。若内球带电 $+q$，外球带电 $-q$，则电荷将形成两个均匀带电球面，通过高斯定理可求得两球之间距离球心为 r 的 P 点的场强

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

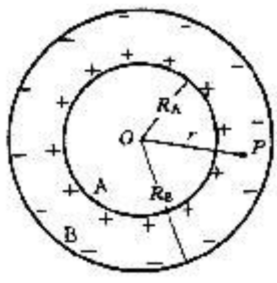


图 9-42 球形电容器

方向沿半径方向。两球之间的电势差

$$U=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{R_\mathrm{A}}^{R_\mathrm{B}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_\mathrm{A}}-\frac{1}{R_\mathrm{B}}\right)$$

球形电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{B}}-R_{\mathrm{A}}} \qquad (9\text{-}41)$$

9.7.3 电容器的联接

电容器的性能指标中有两个是非常重要的，一是电容值，另一个是耐压值。使用电容器时，加到两极板的电压不能超过所规定的耐压值。在实际应用中，若已有的电容器的电容或耐压值不满足要求时，可以把几个电容器联接起来构成一个电容器组，联接的基本方式有并联和串联两种。

电容器并联时，如图 9-43 表示 n 个电容器的并联。充电以后，电容器组所带总电量为各电容器电量之和

$$q=q_1+q_2+\cdots+q_n$$

每个电容器两个极板间的电压相等，设为 U，有

$$U=U_1=U_2=\cdots U_n$$

U 也就是电容器组的电压。所以电容器组的等效电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q_1}{U}+\frac{q_2}{U}+\cdots+\frac{q_n}{U}$$

由于 $\frac{q_i}{U}=C_i$ 为每个电容器的电容，所以有

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n \qquad (9\text{-}42)$$

即**并联电容器的等效电容等于每个电容器电容之和。**

电容器串联时，如图 9-44 表示 n 个电容器的串联，充电后，电容器组上的总电压为各电容器的电压之和

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_n$$

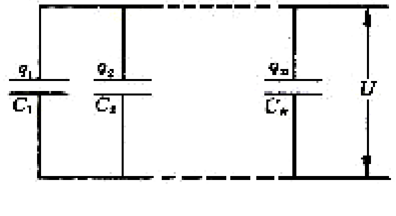


图 9-43 电容器的并联

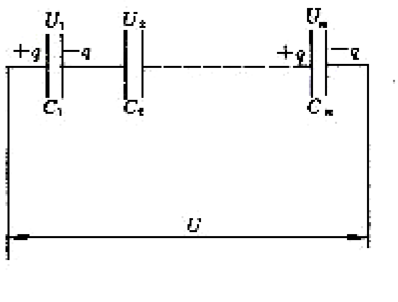


图 9-44 电容器的串联

由于静电感应，每个电容器都带上等量异号的电荷+q 和-q，这也是电容器组所带电量，故有

$$q = q_1 = q_2 = \cdots = q_n$$

为了方便，我们计算等效电容的倒数

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} + \cdots + \frac{U_n}{q}$$

即有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \qquad （9-43）$$

此式表示**串联电容器的电容的倒数等于各电容器电容的倒数之和。**

例 9-17 如图 9-45,电容器 $\mathrm{A_1}$ 充电到电压 $U_0 = 120\mathrm{V}$，然后移去充电用的直流电源，闭合电键 S，将此电容器与电容器 $\mathrm{A_2}$ 相连接，$\mathrm{A_1}$、$\mathrm{A_2}$ 的电容分别为 $C_1 = 8\mu\mathrm{F}$，$C_2 = 4\mu\mathrm{F}$，求电容器组的电压。

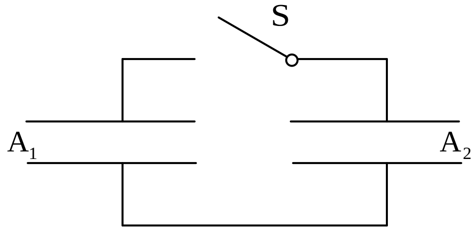


图 9-45 例 9-17 图

解 $\mathrm{A_1}$ 上原有电量 $Q_0 = C_1 U_0 = 8\mu\mathrm{F} \times 120\mathrm{V} = 960\mu\mathrm{C}$

S 合上后，两电容器组成并联电容器组，原来的电荷 Q_0 分给两个电容器。设电容器的电压为 U

$$Q_0 = C_1 U + C_2 U$$

由此 $$U = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6}}\mathrm{V} = 80\mathrm{V}$$

例 9-18 如图 9-46 所示，一平行板电容器的极板面积为 S，板间由两层相对介电常数分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的电介质充满，二者厚度都是板间距离 d 的一半。求此电容器的电容。

解 由于两介质的分界面与板间电场强度垂直，所以该面为一等势面。因此可以设想两电介质在此面上以一薄金属板隔开,这样图示电容器就可以看作是两个电容器串联而成。两个电容器的电容分别是

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2}\varepsilon_{r1} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}{d}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d/2}\varepsilon_{r2}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d}$$

由电容器串联公式（9-43）得

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d\left(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\right)}$$

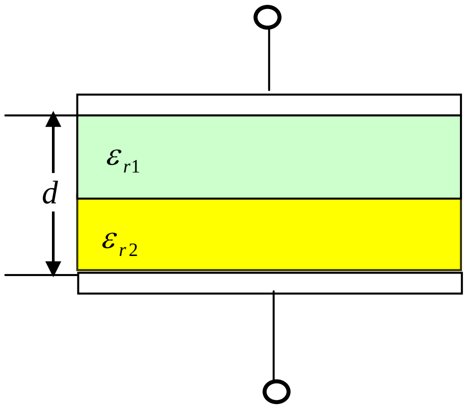


图 9-46 例 9-18 图

例 9-19 平行板电容器两极板的面积为 S，如图 9-47 两极板之间有两层各向同性的均匀介质，分界面平行板面，介电常数分别为 ε_1、ε_2，厚度为 d_1、d_2，自由电荷面密度为 $\pm\sigma$。求（1）在各层介质内的电位移 $\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$；（2）电容器的电容。

解（1） 设这两种电介质中电位移矢量分别为 $\vec{D}_1$、$\vec{D}_2$，电场强度分别为 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$，它们都和极板面垂直，而且都属均匀场。在左极板处，选左、右底面积均为 S 的正柱面为高斯面，左底面在导体板内，导体板内电位移矢量为零，右底面在介电常数分别为 ε_1 的电介质内，侧面的法线与 $\vec{D}_1$ 垂直。

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{右底面}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=D_1 S$$

$$\sum q_0=\sigma S$$

由高斯定理有 $D_1=\sigma$，方向垂直板面向右。

同样在右极板处做高斯面 S'，

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{左底面}\vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-D_2 S'$$

$$\sum q_0=-\sigma S'$$

得 $D_2=\sigma$，方向垂直板面向右。可见，$\vec{D}_1=\vec{D}_2$，即两种介质中 $\vec{D}$ 相同。

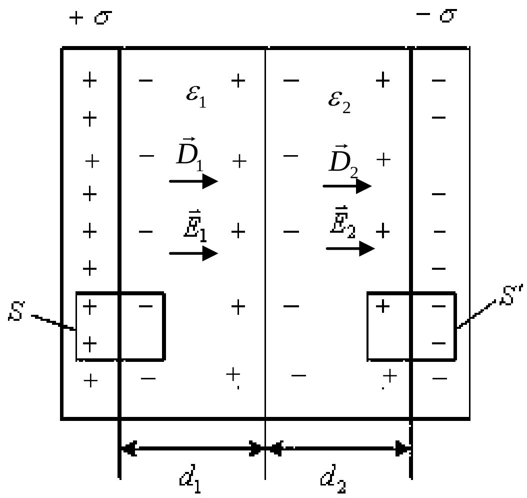


图 9-47 充满两种均匀电介质的平行板电容器

由 $\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}$ 得 $E_1=\dfrac{D_1}{\varepsilon_1}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}$，

$$E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

方向垂直板面向右。

（2）正、负两极板间电势差为

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2$$

所以电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2} = \frac{S}{\frac{1}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{1}{\varepsilon_2} d_2}$$

问题 9-13 从**例 9-19** 可知，在平行板电容器两种均匀介质分界面处，电位移矢量（实际是法向分量）是连续的，而电场强度（实际是法向分量）是不连续的。试谈谈你对这一现象的看法。

9.8 电容器的储能公式 静电场的能量

9.8.1 电容器的储能公式

如图 9-48 所示，有一电容为 C 的平行平板电容器正处于充电过程中，设在某时刻两极板之间的电势差为 u，两极板所带电荷为 $\pm q$，此时若继续将 $+\mathrm{d}q$ 电荷从带负电的极板 B 移到带正电的极板 A 时，外力因克服静电力而需作的功为

$$\mathrm{d}W = u\mathrm{d}q = \frac{1}{C} q\mathrm{d}q$$

因此当电容器从 $q=0$ 开始充电到 $q=Q$ 时，外力所作的总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{q}{C} \mathrm{d}q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

根据功能原理，这个功应等于带电电容器储存的静电能，利用关系式 $Q=CU$，得**电容器储能公式**

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \tag{9-44}$$

式（9-44）适用于任何种类的电容器所存储的能量的计算。

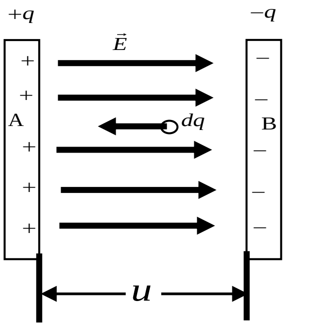


图 9-48 把＋dq 电荷从带负电极板移到带正电极板，外力作功 dW=udq

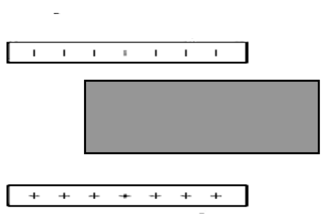


图 9-49 问题 9-14 图

9.8.2 静电场的能量

电容器的能量贮存在哪里呢?我们仍以平行板电容器为例进行讨论。

对于极板面积为 S，间距为 d 的平行板电容器，若不计边缘效应，则电场所占有的空间体积为 Sd，于是电容器贮存的能量也可以写成

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V$$

由此可见，静电能可以用表征电场性质的电场强度来表示，而且和电场所占的体积 $V=Sd$ 成正比。这表明**电能贮存在电场**中，由于平行板电容器中电场是均匀分布的，所贮存的静电场能量也应该是均匀分布的，定义每单位体积的电场能量为**静电场能量密度**（J/m^3），则静电场能量密度

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}=\frac{1}{2}DE \qquad (9\text{-}45)$$

上述结果虽是从均匀电场的特例中导出的，但可以证明这是一个普遍适用的公式，在非均匀电场和变化的电磁场中仍然是正确的，只是此时的能量密度是逐点改变的。一个带电系统的整个电场中储存的总能量可按下式计算

$$\mathrm{W}_e=\iiint_v w_e\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}DE\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V \qquad (9\text{-}46)$$

积分区域遍及整个电场空间。

例 9-20 如图 9-50 所示，圆柱形电容器由半径为 R_1 的导体圆柱面和同轴的半径为 R_2 的圆柱面组成，两圆柱面的长度为 l，柱面间充满介电常数为 ε 的电介质。若圆柱面单位长度所带电量为 λ，求电容器贮存的电场能量。

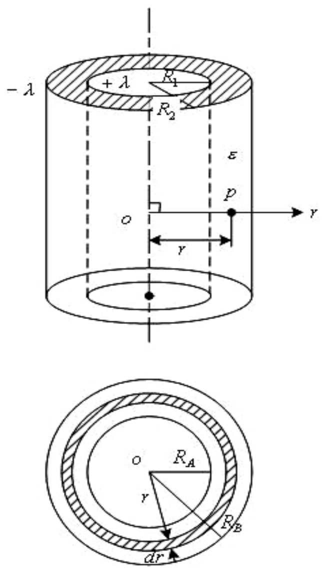


图 9-50 圆柱形电容器贮存能量的计算

解 由高斯定理知，介质内任一点 P 的场强大小为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

在半径为 r，厚为 $\mathrm{d}r$，长为 l 的薄圆筒内，电场能量为

$$\mathrm{d}W_e=w_e\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon^2r^2}\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\lambda^2 l}{4\pi\,\varepsilon\,r}\mathrm{d}r$$

所求能量为

$$W_e=\iiint_V w_e \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

问题 9-15 例 9-20 柱形电容器贮存能量也可以根据公式 $W_e=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ 计算。试计算之。

习题课

第 9 章 静电场

课程内容

9.1 电场　电场强度

9.2 电通量 高斯定理

9.3 电场力的功 电势

9.4 场强与电势的关系

9.5 静电场中的导体

9.6 静电场中的电介质

9.7 电容 电容器

9.8 电场的能量

教学要求

了解电荷的量子化、等势面的定义及性质、电场强度与电势梯度的关系，孤立导体的电容、平行板，球形，圆柱形的电容器的计算、电容的串联和并联，了解有极分子和无极分子，有极分子的取向极化、无极分子的位移极化、电极化强度。了解电介质的静电场。

理解带电体、点电荷、正、负电荷、电性力、电荷守恒定律、电场力的叠加原理、库仑定律及应用；场的观点、试探电荷、电场力、静电场、电偶极子定义、电场线、电场强度及其计算；静电场力作功的特点，环路定理及应用、电势能，静电场的能量，静电平衡的条件、推论及其性质、静电平衡时导体上的电荷分布，空腔导体内外的静电场、静电屏蔽，有电介质时的高斯定理及应用、电位移的定义、D，E，P 之间的关系。

掌握电场强度通量、高斯定理及其应用；电势及其计算、电势差。

重点与难点

重点：高斯定理及其应用。

难点：电场强度与电势梯度的关系。

9.1 电场　电场强度

9.1.1 电荷

9.1.2 库仑定律

$$\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r,12} \qquad （9-1）$$

$$k\approx 8.9875\times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

为了使由库仑定律推导出的一些常用公式简化，我们引入新的常量ε_0来代替k，两者的关系为

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi k}=8.8542\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\approx 8.85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$$

ε_0称为**真空电容率**，也称**真空介电常量**。

库仑定律写成：

$$\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r,12} \qquad （9-2）$$

9.1.3　电场强度

我们用$\dfrac{\vec{F}}{q_0}$定义电场中某点的电场强度，简称场强，用$\vec{E}$表示，即

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0} \qquad （9-3）$$

即，电场中任一点（场点）的电场强度等于单位正电荷在该点所受的电场力。电场强度的单位为牛/库（N/C）或伏/米（V/m）。

说明 1. 电场强度是电场的属性，与试探电荷是否存在无关。

2. 电场强度是矢量，当q_0为正时，其方向与电场力$\vec{F}$的方向相同；当q_0为负时，其方向与电场力$\vec{F}$的方向相反。

3. 在已知静电场中各点电场强度$\vec{E}$的情况下，可由式（9-3）求出置于其中任意点处的点电荷q受的力

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

9.1.4　电场强度叠加原理

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\sum_{n=1}^{n}\vec{E}_n \qquad (9\text{-}4)$$

上式表明,电场中任一场点处的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自产生的场强的矢量和.这就是电场强度叠加原理。任何带电体都可以看作许多点电荷的集合，由该原理可计算任意带电体产生的电场强度。

9.1.5　电场强度的计算

如果场源电荷分布状况已知，那么根据电场强度叠加原理，原则上可以求得电场分布。

1 点电荷的电场强度

设在真空中有一个静止的点电荷q，根据库仑定律放在场点P的试探电荷q_0受的力

$$\vec{F}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$是从源电荷q指向P点的矢量$\vec{r}$的单位矢量。则点电荷q在P点的场强

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \qquad (9\text{-}5)$$

由式（9-5）可知，如果$q>0$, P 点的场强$\vec{E}$与$\vec{e}_r$的方向相同，$q<0$, 与$\vec{e}_r$的方向相反，如图 9-4 所示。

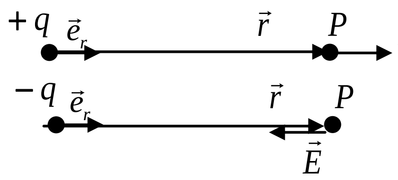


图 9-4 静止点电荷的电场强度

2 点电荷系的电场强度

设在真空中有 n 个点电荷组成的电荷系q_1、q_2、$\cdots$、q_n，要求这些点电荷在空间任一点 P 产生的场强。用$\vec{e}_{ri}$表示从电荷q_i指向P点的矢量$\vec{r}_i$的单位矢量。$\vec{E}_i$为q_i单独存在时在 P 点产生的电场强度，则

$$\vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}$$

根据电场强度叠加原理，可得点 P 的总电场强度：

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri} \qquad (9\text{-}6)$$

3 电荷连续分布的带电体的电场强度

若带电体的电荷是连续分布的，可以认为该带电体的电荷分割成许多无限小的电荷元 dq 组成的，而每个电荷元可以看成点电荷，其中任一电荷元 dq 在场点 P 产生的场强 $\mathrm{d}\vec{E}$ 为

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

式中 r 是电荷元 dq 到场点 P 的距离，$\vec{e}_r$ 为 dq 指向场点 P 的单位矢量。整个带电体在 P 点产生的总场强可用积分计算为

$$\vec{E}=\int\mathrm{d}\vec{E}=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \tag{9-7}$$

由此可得连续分布电荷的电场强度的计算思路

（1） 在带电体上任取一电荷元，按以下方式确定其大小。

对于电荷体分布：$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V$，$\rho$ 为电荷体密度，单位 $\mathrm{C/m^3}$。

对于电荷面分布：$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S$，$\sigma$ 为电荷面密度，单位 $\mathrm{C/m^2}$。

对于电荷线分布：$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l$，$\lambda$ 为电荷线密度，单位 $\mathrm{C/m}$。

（2） 选取适当的坐标系，由 $\mathrm{d}\vec{E}=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ 求出 dq 在场点 P 产生的电场强度 $\mathrm{d}\vec{E}$，并投影到直角坐标系的各轴上，即写出 $\mathrm{d}E_x$、$\mathrm{d}E_y$ 和 $\mathrm{d}E_z$。

（3） 确定积分上下限，对电场各分量分别进行积分计算。在计算过程中要注意根据对称性来简化计算过程，即如果由电荷分布的对称性可分析出总场强的方向，则只需求出电荷元的电场强度在此方向上的分量之和。

（4） 必要时进行讨论。

9.1.6 带电体在外电场中所受的作用

点电荷 q 放在电场强度为 $\vec{E}$ 的外电场中某一点时，电荷受静电力

$$\vec{F}=q\vec{E} \tag{9-8}$$

要计算一个带电体在电场中受到的作用，一般要把带电体划分为许多电荷元，先计算每个电荷元所受的作用力，然后用积分求带电体所受的合力和合力矩。

9.2 电通量 高斯定理

9.2.1 电场的图示法　电场线

1 电场线

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}S_{\perp}} \tag{9-9}$$

2 静电场电场线的性质

通过对各种各样电场的电场线的观察，我们发现静电场的电场线具有如下的性质。

（1） 静电场的电场线总是永不闭合也不中断的曲线，而是起始于正电荷或无穷远，终止于负电荷或无穷远。

（2） 在没有电荷的空间内，任何两条电场线不会相交。说明静电场中每一点的场强是唯一的。

9.2.2 电通量

通过电场中某一个面的电场线条数叫做通过该面的**电场强度通量**，简称为**电通量**,用 Φ_E 表示,单位伏·米(V·m)。

匀强电场的电场线是一系列均匀分布的平行直线，在匀强电场中取一个平面 S, 若 S 面与 $\vec{E}$ 垂直[如图 9-13(a)],则

$$\Phi_E = ES$$

若 S 面的单位法向矢量 $\vec{e}_n$ 与 $\vec{E}$ 方向的夹角为 θ，如图 9-13(b)，我们考虑 S 在垂直于场强方向的投影 $S_{\perp}$，那么通过 S 和 $S_{\perp}$ 的电通量相等，

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{e}_n S = \vec{E}\cdot\vec{S} \quad (9\text{-}10)$$

由式(9-10)决定的电通量 Φ_E 有正负之别。当 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$，$\Phi_E > 0$；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\Phi_E = 0$，当 $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$，$\Phi_E < 0$。

计算非匀强电场中,穿过任意曲面 S 的电通量 如图 9-13(c)所示,可将曲面 S 分割成无限多个面积元 dS，先计算通过每一面积元 dS 的电通量，对于曲面上面元 $\mathrm{d}S$，我们引入面积元矢量 $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_n$，其中 $\mathrm{d}S$ 为面积元矢量的大小，$\vec{e}_n$ 表示面积元矢量单位法向矢量，若 S 面的单位法向矢量 $\vec{e}_n$ 与 $\vec{E}$ 方向的夹角为 θ，则

$$\mathrm{d}\Phi_E = E\mathrm{d}S\cos\theta = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

然后对整个 S 面上所有面元的电通量相加，即

$$\Phi_E=\iint_S E\mathrm{d}S\cos\theta=\iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad (9\text{-}11)$$

当曲面 S 为闭合曲面时，上式写成

$$\Phi_E=\oiint_S E\mathrm{d}S\cos\theta=\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad (9\text{-}12)$$

积分符号 $\oiint_S$ 表示对整个闭合曲面进行面积分。

9.2.3 高斯定理

在一个点电荷电场中任意一个闭合曲面 S 的电通量或者为 q/ε_0 或者为零，即

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\begin{cases}\dfrac{q}{\varepsilon_0} & (S\text{ 包围点电荷 }q)\\ 0 & (S\text{ 不包围点电荷 }q)\end{cases} \qquad (9\text{-}13)$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \qquad (9\text{-}14a)$$

如果电场是由连续分布的电荷所激发的，则式(9-14)可写成

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\iiint_V \rho\mathrm{d}V}{\varepsilon_0} \qquad (9\text{-}14b)$$

其中 ρ 为电荷体密度，V 为闭合曲面 S 所包围的体积。

通过真空中的静电场中任一闭合曲面的电通量 Φ_E 等于包围在该闭合曲面内的电荷代数和 $\sum q_i$ 的 ε_0 分之一，而与闭合曲面外的电荷无关. 这就是静电场的高斯定理。高斯定理中所说的闭合曲面通常称为高斯面。

关于高斯定理的几点讨论 1. 高斯定理表达式左边的场强 $\vec{E}$ 是曲面上各点的场强，它是由**全部电荷**（既包括闭合曲面内又包括闭合曲面外）共同产生的合电场，并非只由闭合曲面内的电荷产生。

2. 通过闭合曲面的总电通量由它所包围的电荷决定，闭合曲面外的电荷对总电通量没有贡献。

3. 高斯定理反映了静电场最基本性质之一：***静电场是有源场***。电场线起始于正电荷，终止于负电荷的。

4. 高斯定理和库仑定律都是静电场的基本规律。对静电场来说，两者并不是互相独立的，而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律。本节我们利用库仑定律和叠加原理导出了高斯定理，实际上也可以把高斯定理作为基本定律结合空间的各向同性而导出库仑定律，但在研究**运动电荷**的电场或一般随时间变化的电场时，库仑定律不再成立，而高斯定理依然有效。

9.2.4 高斯定理的应用

应用高斯定理解题步骤

1. 根据电荷分布的对称性,分析场强分布的对称性。

2. 选取合适的通过待求场强 $\vec{E}$ 的场点的高斯面 S 。高斯面是简单的几何闭合面(通常是球面或圆柱面);在 S 面上欲求 $\vec{E}$ 之处使 $E=$ 常量， $\vec{E}$ 与 $\mathrm{d}\vec{S}$ 夹角 $\theta=0^0$ 或常数，从而积分 $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 中的 $\vec{E}$ 能以标量形式从积分号内提出来，而不需求 $\vec{E}$ 之处使 $\theta=90^0$（$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\cos\theta\mathrm{d}S=0$）。

3. 分别求出通过高斯面的的电通量和高斯面内的电荷。

4. 由高斯定理求电场强度。

9.3 电场力的功　电势

9.3.1 电场力的功

$$\mathrm{d}W=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

当试探电荷 q_0 由 a 点运动到 b 点时，电场力的功为

$$W=\int\mathrm{d}W=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right] \tag{9-15a}$$

式中 r_a 和 r_b 分别为试探电荷 q_0 的起点和终点距点电荷 q 的距离。可见，在静止点电荷 q 的电场中，电场力对试探电荷 q_0 所做的功，只与位移路径的起点 a 和终点 b 的位置有关，而与路径无关。

由许多点电荷组成的点电荷系。设 q_0 在点电荷系 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的电场中由 a 点沿任意路运动到 b 点时，由场强叠加原理，静电场力的功为:

$$W=\int_{ab}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\overline{ab}}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{ab}q_0\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_{ab}q_0\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_{ab}q_0\vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right) \tag{9-15b}$$

式中r_{ai}， r_{bi}分别表示路径的起点和终点距点电荷q_i的距离。上式表明，功仍只取决于路径的始、末二位置，而与路径无关，由此得出如下结论：试探电荷在任何静电场中移动时，电场力所作的功，只与电场的性质，试探电荷所带电量的大小及路径的起点和终点的位置有关，而与路径无关。静电场的这一特性称为静电场的保守性，即静电场是保守场，静电力是保守力。

9.3.2 静电场的环路定理

静电场力所作的功与路径无关的特性还可用另一种形式来表达。设试探电荷q_0，在静电场中 a 点经过任意闭合路径(如图 9-20 中 *acbda*)又回到 a 点的位置，则电场力在整个闭合路径 *acbda* 上做功为

$$\oint_L q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

因为试探电荷$q_0\neq 0,$所以上式也可写成

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0 \tag{9-16}$$

式（9-16）左边是电场强度$\vec{E}$沿任意闭合路径的线积分，称为电场强度$\vec{E}$的环流。它表明在静电场中，电场强度$\vec{E}$的环流恒等于零，这一结论叫做静电场的环路定理。它是静电场为保守场的数学表述。由于这一性质，我们才能引进电势能和电势的概念。

9.3.3 电势能

当试探电荷q_0在静电场中的 a 点移动到 b 点时，电场力对q_0所做的功W_{ab}等于q_0在 a、b 两点电势能的减少，则

$$E_a-E_b=W_{ab}=q_0\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{9-17}$$

与所有势能一样，电势能是一个相对的量。为了确定电荷在电场中某一点电势能的大小，必须选择一个电势能的参照点。通常当电荷分布于有限区域内时，我们选定q_0在无限远处

的静电势能为零，亦即令$E_\infty=0$，这样试探电荷q_0在 a 点的静电势能为

$$E_a=W_{a\infty}=q_0\int_a^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\qquad(9\text{-}18)$$

即**电荷q_0在某一点 a 的静电势能E_a在数值上等于q_0从 a 点经任意路径移到无限远处电场力所作的功$W_{a\infty}$。**电势能的单位为焦耳（J)。

9.3.4 电势　电势差

式（9-17）表示电势能E_a不仅与电场性质及 a 点位置有关，而且还与q_0有关，但比值$\dfrac{E_a}{q_0}$与试探电荷无关，仅由电场性质及 a 点位置决定。它是描述静电场本身在 a 点的性质的物理量，称为**电势**，用符号V_a来表示，即

$$V_a=\frac{E_a}{q_0}=\int_a^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\qquad(9\text{-}19)$$

式(9-19)表明，若规定无限远处的静电势能为零，则静电场中某点的电势在数值上等于把单位正电荷从该点经过任意路径移动到无限远时电场力所作的功。电势的单位为伏特（V)，1V＝1J／C。

从电势的定义式(9-19)，试探电荷q_0在 a 点的静电势能为

$$E_a=q_0V_a\qquad(9\text{-}20)$$

在静电场中任意两点 a 和 b 电势之差称为 a、b 两点的电势差，通常也叫做电压，用公式表示为

$$U_{ab}=V_a-V_b=\int_a^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_b^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\qquad(9\text{-}21)$$

式(9-21)表明，静电场中任意 a、b 两点的电势差在数值上等于把单位正电荷从 a 点沿任意路径移到 b 点时，静电场力所作的功。因此，当任一点电荷从 a 点移到 b 点时，电场力所作的功可用 a、b 两点的电势差表示为

$$W_{ab}=q_0(V_a-V_b)=q_0U_{ab}\qquad(9\text{-}22)$$

注意 1.电势和电势能是标量,但有正有负,它们的量值有相对意义,与零点的选择有关。通常当场源为有限带电体时,规定无限远处为零点，此时在某点 a 的电势能和电势分别按式（9-18）与式（9-19）计算。当电荷的分布延伸到无限远时(如“无限大带电平面”或“无限长带电直线”)，则零点不能再选在无限远处，只能在有限的范围内选取电场中某点为零点,按　$E_a=q_0\int_a^{\text{零势能点}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 计算电势能，$V_a=\int_a^{\text{零电势点}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 计算电势。

2．在涉及静电场的有关问题时，如使用动能定理、功能原理和能量守恒定律等，必须

考虑静电场力的功与静电势能。

9.3.5 电势的计算

1 点电荷的电势

$$V_a=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\tag{9-23}$$

由此可见，在点电荷周围空间中任意一点的电势与该点离点电荷的距离 r 成反比。在正点电荷的电场中，各点电势均为正值，在负点电荷的电场中，各点的电势均为负值。

2 点电荷系的电势

若是点电荷系 q_1，$q_2,\cdots$，q_n 电场，任一点 a 的电势由场强叠加原理可知为

$$V_a=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^{\infty}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{\infty}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_a^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_a^{\infty}\vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\cdots+\frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$V_a=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\tag{9-24}$$

式中 r_i 为第 i 个点电荷 q_i 到 a 点的距离。即点电荷系的电场中某点的电势等于各个点电荷单独存在时在该点所激发的电势的代数和。这一结论称为静电场的**电势叠加原理。**

3 连续分布电荷的电势

若一带电体上的电荷是连续分布的，可以把带电体分成无数电荷元 $\mathrm{d}q$ 的集合，r 为 $\mathrm{d}q$ 到给定点 a 的距离，则 a 点的电势为

$$V_a=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}\tag{9-25}$$

积分遍及整个带电体。

由上节电势的定义与本节的讨论,可知求电场中的电势，通常有两种方法。

（1） 用电势定义 $V_a=\int_a^{\text{零电势点}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ ，这种方法常用于已知电场分布，或利用高斯定理很容易确定电场分布的情况。

（2） 用式（9-24）和式（9-25）所表达的电势叠加原理。

9.4 电场强度与电势的关系

9.4.1 等势面

在电场中电势相等的点所构成的曲面称为**等势面**。

根据等势面的定义可知它有下述性质：**1. 等势面与电场线处处垂直；2. 在等势面上移动电荷，电场力不做功。**

9.5 静电场中的导体

9.5.1 导体的静电平衡

处于静电平衡状态的导体，除了电场强度满足上述的静电平衡条件外，还具有以下性质：

（1)导体是等势体，导体表面是等势面。当导体处于静电平衡时，因为其内部电场强度处处为零，而且表面紧邻处的电场强度都垂直于表面，所以导体中以及表面上任意两点间的电势必然为零。

（2)导体内部处处没有未被抵消的净电荷，净电荷只分布在导体的表面上。

（3） 导体以外，靠近导体表面附近场强大小和导体表面在该处的面电荷密度σ 的关系为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad （9\text{-}30）$$

9.5.2 静电屏蔽

静电平衡时导体内部的场强为零这一规律在技术上用来作静电屏蔽。

1 空腔导体（无论接地与否）将使腔内空间电场不受外部空间的电场的影响。

2 接地导体壳内表面以外的空间不受腔内电场的影响

9.5.3 静电平衡时静电场的分析与计算

在静电平衡情况下，场强和电势的计算方法为首先根据导体静电平衡条件和电荷守恒求出电荷分布，然后再计算场强和电势。

9.6 静电场中的电介质

9.6.1 电介质的极化

1 两类电介质

无极分子电介质；有极分子电介质。

2 电介质的极化

9.6.2 电介质对电场的影响

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad (9\text{-}31)$$

式中ε_r称为电介质的**相对介电常数，**为没有单位的纯数。真空中的$\varepsilon_r = 1$，空气中的$\varepsilon_r = 1.005$，可认为近似等于 1，其它电介质的ε_r都大于 1。相对介电常数ε_r和真空介电常数ε_0的乘积，即$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$称为电介质的**绝对介电常数，**简称为**介电常数。**

9.6.3 $\vec{D}$矢量 有电介质时的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i} \qquad (9\text{-}35)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi\right) \vec{E}$$

令$\varepsilon_r = \left(1 + \chi\right)$叫电介质的相对介电常数，则

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \qquad (9\text{-}36)$$

$$\because \varepsilon_{\mathrm{r}} > 1 \quad \therefore \vec{E} < \vec{E}_0$$

9.7 电容　电容器

9.7.1 孤立导体的电容

理论和实践都表明，附近没有其它导体和带电体的孤立导体，它气所带电量与它的电势成正比，即 $q \propto U$

写成等式

$$C = \frac{q}{U} \qquad (9\text{-}37)$$

比例系数 C 为孤立导体的电容。电容的大小仅与导体的尺寸、形状、相对位置、其间的电介质有关，与 q 和 U 无关。可以看出电容 C 是使导体升高单位电势所需要的电量，反映了导体储存电荷和电量的能力，在量值上等于两极板间的电势差为单位值时所容纳的电荷量。电容的单位为法拉(F)。在实际应用中，法拉太大，常用微法$(\mu\mathrm{F})$、皮法(pF)等作为电容的单位,$1\mathrm{F}=10^{6}\mu\mathrm{F}=10^{12}\mathrm{pF}$ 。

9.7.2 电容器及其电容

电容为

$$C=\frac{q}{V_A-V_B} \qquad (9\text{-}38)$$

电容器的电容 C 与两导体的尺寸、形状、相对位置、其间的电介质有关，与极板是否带有电荷无关。组成电容器的两导体叫电容器的极板。在实际应用的电容器中，对其屏蔽性要求并不很高，只要求从一个极板发出的电场线都终止在另一个极板就行。电容器可用来存储电荷和电能。

设电容器的两个极板分别带电+q 和-q，通过计算两极板之间的电场分布，由电场分布计算两极板之间的电势差$U=V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}}$， 由电容定义式（9-38）可以方便地求出几类电容器的电容公式。

1 平行板电容器

故平板电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (9\text{-}39)$$

2 圆柱形电容器

圆柱形电容器的电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{A}}}} \qquad (9\text{-}40)$$

单位长度上的电容为 $$C_l=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{A}}}}$$

3 球形电容器

球形电容器的电容为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{A}}R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{B}}-R_{\mathrm{A}}} \qquad (9\text{-}41)$$

9.7.3 电容器的联接

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n \qquad (9\text{-}42)$$

即并联电容器的等效电容等于每个电容器电容之和。

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n} \qquad (9\text{-}43)$$

此式表示串联电容器的电容的倒数等于各电容器电容的倒数之和。

9.8 电容器的储能公式 静电场的能量

9.8.1 电容器的储能公式

$$W=\int \mathrm{d}W=\int_0^Q\frac{q}{C}\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU \qquad (9\text{-}44)$$

式（9-44）适用于任何种类的电容器所存储的能量的计算。

9.8.2 静电场的能量

静电场能量密度

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}=\frac{1}{2}DE \qquad (9\text{-}45)$$

一个带电系统的整个电场中储存的总能量可按下式计算

$$\mathrm{W}_e=\iiint_v w_e\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}DE\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V \qquad (9\text{-}46)$$

积分区域遍及整个电场空间。

例 1 填空题

（1）在静电场中，电势不变的区域，场强必定为_____。

［答案：0］

（2）一个点电荷 q 放在立方体中心，则穿过某一表面的电通量为____，若将点电荷由中心向外移动至无限远，则总通量将____。

［答案：q/6ε₀，将为零］

（3）电介质在电容器中作用（a）——（b）——。

［答案：(a)提高电容器的容量;(b) 延长电容器的使用寿命］

（4）电量 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，则球内球外的静电能之比_____。

$$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4 \mathrm{d}r+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

［答案：1：5］

例 2 选择题

(1) 正方形的两对角线处各放置电荷 Q，另两对角线各放置电荷 q，若 Q 所受到合力为零，则 Q 与 q 的关系为：()

（A）$Q=-2^{3/2}q$　（B）$Q=2^{3/2}q$　（C）Q=-2q　（D）Q=2q

［答案：A］

(2) 下面说法正确的是：()

（A）若高斯面上的电场强度处处为零，则该面内必定没有电荷；

（B）若高斯面内没有电荷，则该面上的电场强度必定处处为零；

（C）若高斯面上的电场强度处处不为零，则该面内必定有电荷；

（D）若高斯面内有净电荷，则该面上的电场强度通量必不为零。

［答案：D］

(3) 一半径为 R 的导体球表面的面电荷密度为 σ，则在距球面 R 处的电场强度（）

（A）σ/ε_0　（B）$\sigma/2\varepsilon_0$　（C）$\sigma/4\varepsilon_0$　（D）$\sigma/8\varepsilon_0$

［答案：C］

(4) 在电场中的导体内部的（）

(A)电场和电势均为零；　(B)电场不为零，电势均为零;(C)电势和表面电势相等；　(D)电势低于表面电势。

［答案：C］

例 3 半径为R_1和R_2（$R_2 > R_1$）的两无限长同轴圆柱面，单位长度上分别带有电量λ和-λ，试求:(1) $r < R_1$；(2) $R_1 < r < R_2$；(3) $r > R_2$处各点的场强.

解：高斯定理$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

取同轴圆柱形高斯面，侧面积$S = 2\pi rl$

则 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E2\pi rl$

对(1) $r < R_1$ $\sum q = 0, E = 0$

(2) $R_1 < r < R_2$ $\sum q = l\lambda$

∴ $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 沿径向向外

(3) $r > R_2$ $\sum q = 0$

∴ $E = 0$

例 4 均匀带电球壳内半径6cm，外半径10cm，电荷体密度为2×10^{-5} C·m^{-3}求距球心5cm，8cm，12cm 各点的场强.

解：高斯定理$\oint_s \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$，$E4\pi r^2 = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

当$r = 5$ cm时，$\sum q = 0$，$\vec{E} = 0$

$r = 8$ cm时，$\sum q = \rho\dfrac{4\pi}{3}(r^3 - r_{内}^3)$

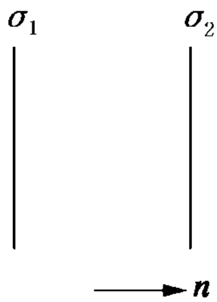
$$\therefore E = \frac{\rho\frac{4\pi}{3}\left(r^3 - r_{内}^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\times 10^{-5}\times\left(0.08^3 - 0.06^3\right)}{3\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.08^2} \approx 3.48\times 10^4\ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$，方向沿半径向外.

$r = 12$ cm时，$\sum q = \rho\dfrac{4\pi}{3}(r_{外}^3 - r_{内}^3)$

$$\therefore E = \frac{\rho\frac{4\pi}{3}\left(r_{外}^{\ 3} - r_{内}^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\times 10^{-5}\times\left(0.1^3 - 0.06^3\right)}{3\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.12^2} = 4.10\times 10^4\ \ \mathrm{N\cdot C^{-1}}$$ 沿半径向外.

例 5 两个无限大的平行平面都均匀带电，电荷的面密度分别为σ_1和σ_2，试求空间各处场强.

解： 如题 5 图示，两带电平面均匀带电，电荷面密度分别为σ_1与σ_2，



题5图

两面间， $\vec{E}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2)\vec{n}$

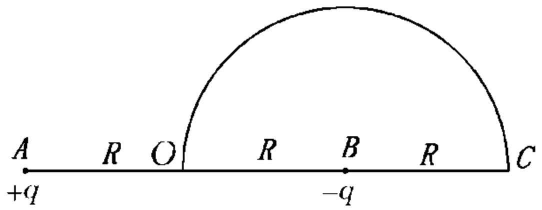
σ_1面外， $\vec{E}=-\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2)\vec{n}$

σ_2面外， $\vec{E}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2)\vec{n}$

$\vec{n}$：垂直于两平面由σ_1面指为σ_2面.

例 6 如题6图所示，在A，B两点处放有电量分别为+q，-q的点电荷，AB间距离为2R，现将另一正试验点电荷q_0从O点经过半圆弧移到C点，求移动过程中电场力作的功.

解： 如题 6 图示



题 6 图

$$U_O=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{R}-\frac{q}{R})=0$$

$$U_C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{3R}-\frac{q}{R})=-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

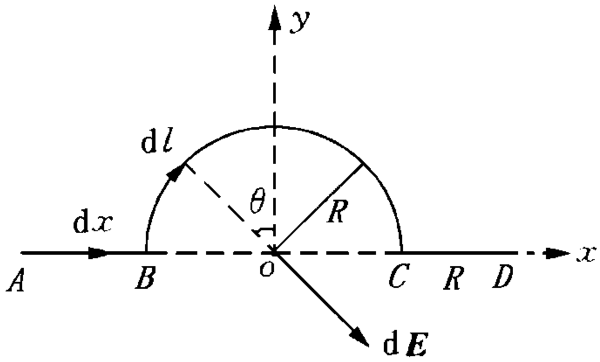
$\therefore$ $$W=q_0(U_O-U_C)=\frac{q_o q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

例 7 如题7图所示的绝缘细线上均匀分布着线密度为λ的正电荷，两直导线的长度和半圆

环的半径都等于R．试求环中心O点处的场强和电势．

解：(1)由于电荷均匀分布与对称性，AB和CD段电荷在O点产生的场强互相抵消，取

$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$则$\mathrm{d}q = \lambda R\mathrm{d}\theta$产生$O$点$\mathrm{d}\vec{E}$如图，由于对称性，$O$点场强沿$y$轴负方向



题 7 图

$$E = \int \mathrm{d}E_y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

(2) CD电荷在O点产生电势，以$U_\infty = 0$

$$U_1 = \int_C^D \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x} = \int_R^{2R} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

同理AB产生 $$U_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

半圆环产生 $$U_3 = \frac{\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

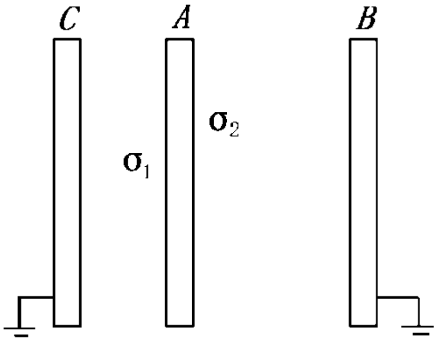
∴ $$U_O = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2 + \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

例 8　三个平行金属板A，B和C的面积都是200cm^2，A和B相距4.0mm，A与C相距2.0 mm．B，C都接地，如题9-19图所示．如果使A板带正电3.0×10^{-7}C，略去边缘效应，问B板和C板上的感应电荷各是多少?以地的电势为零，则A板的电势是多少?

解：如题 8 图示，令 A 板左侧面电荷面密度为 σ_1，右侧面电荷面密度为 σ_2

(1) ∵ $U_{AC}=U_{AB}$，即

∴ $$E_{AC}\mathrm{d}_{AC}=E_{AB}\mathrm{d}_{AB}$$



题 8 图

∴ $$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{E_{AC}}{E_{AB}}=\frac{\mathrm{d}_{AB}}{\mathrm{d}_{AC}}=2$$

且 $$\sigma_1+\sigma_2=\frac{q_A}{S}$$

得 $$\sigma_2=\frac{q_A}{3S},\qquad \sigma_1=\frac{2q_A}{3S}$$

而 $$q_C=-\sigma_1 S=-\frac{2}{3}q_A=-2\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

$$q_B=-\sigma_2 S=-1\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

(2) $$U_A=E_{AC}\mathrm{d}_{AC}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\mathrm{d}_{AC}=2.3\times10^3\ \mathrm{V}$$

例 9 C_1 和 C_2 两电容器分别标明“200 pF、500 V”和“300 pF、900 V”，把它们串联起来后等值电容是多少?如果两端加上1000 V的电压，是否会击穿?(3)如果要使这电容器组不击穿，最大可加多大电压?

解：(1) C_1 与 C_2 串联后电容

$$C'=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{200\times300}{200+300}=120\ \ \mathrm{pF}$$

(2)串联后电压比

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{3}{2}$$，而$U_1+U_2=1000$

$\therefore \quad U_1=600$ V，$U_2=400$ V

即电容C_1电压超过耐压值会击穿，然后C_2也击穿.

（3）要使这电容器组不击穿，则$U_1=500$ V，故$U_2=\frac{1000}{3}$ V，最大可加电压：

$$U_1+U_2=\frac{2500}{3}\text{ V}$$

作业：5、15、16