第 28 讲 电势 电场强度与电势的关系

教学要求：

了解等势面的定义及性质、电场强度与电势梯度的关系， 理解电势能， 掌握电势及其计算、电势差。

重点与难点：

重点：电势及其计算。

难点：电场强度与电势梯度的关系。

9.3.3 电势能

静电场的环路定理表明静电场是保守场,可以引进电势能的概念。即认为试探电荷q_0在静电场中某一位置，具有一定的电势能，以E_a和E_b分别表示q_0在起点 a 和终点 b 的电势能。

当试探电荷q_0在静电场中的 a 点移动到 b 点时，电场力对q_0所做的功W_{ab}等于q_0在 a、b 两点电势能的减少，则

$$E_a - E_b = W_{ab} = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{9-17}$$

与所有势能一样，电势能是一个相对的量。为了确定电荷在电场中某一点电势能的大小，必须选择一个电势能的参照点。通常当电荷分布于有限区域内时，我们选定q_0在无限远处的静电势能为零，亦即令$E_\infty = 0$，这样试探电荷q_0在 a 点的静电势能为

$$E_a = W_{a\infty} = q_0\int_a^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{9-18}$$

即**电荷q_0在某一点 a 的静电势能E_a在数值上等于q_0从 a 点经任意路径移到无限远处电场力所作的功$W_{a\infty}$。**电势能的单位为焦耳（J）。

9.3.4 电势　电势差

式（9-17）表示电势能E_a不仅与电场性质及 a 点位置有关，而且还与q_0有关，但比值$\dfrac{E_a}{q_0}$与试探电荷无关，仅由电场性质及 a 点位置决定。它是描述静电场本身在 a 点的性质的物理量，称为**电势**，用符号V_a来表示，即

$$V_a = \frac{E_a}{q_0} = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (9\text{-}19)$$

式(9-19)表明，若规定无限远处的静电势能为零，则静电场中某点的电势在数值上等于把单位正电荷从该点经过任意路径移动到无限远时电场力所作的功。电势的单位为伏特（V），1V＝1J／C。

从电势的定义式(9-19)，试探电荷 q_0 在 a 点的静电势能为

$$E_a = q_0 V_a \qquad (9\text{-}20)$$

在静电场中任意两点 a 和 b 电势之差称为 a、b 两点的电势差，通常也叫做电压，用公式表示为

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_b^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{b} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad (9\text{-}21)$$

式(9-21)表明，静电场中任意 a、b 两点的电势差在数值上等于把单位正电荷从 a 点沿任意路径移到 b 点时，静电场力所作的功。因此，当任一点电荷从 a 点移到 b 点时，电场力所作的功可用 a、b 两点的电势差表示为

$$W_{ab} = q_0(V_a - V_b) = q_0 U_{ab} \qquad (9\text{-}22)$$

注意 1.电势和电势能是标量,但有正有负,它们的量值有相对意义,与零点的选择有关。通常当场源为有限带电体时,规定无限远处为零点，此时在某点 a 的电势能和电势分别按式（9-18）与式（9-19）计算。当电荷的分布延伸到无限远时(如“无限大带电平面”或“无限长带电直线”)，则零点不能再选在无限远处，只能在有限的范围内选取电场中某点为零

点,按 $E_a = q_0 \int_a^{\text{零势能点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 计算电势能，$V_a = \int_a^{\text{零电势点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 计算电势。

2．在涉及静电场的有关问题时，如使用动能定理、功能原理和能量守恒定律等，必须考虑静电场力的功与静电势能。

9.3.5 电势的计算

1 点电荷的电势

点电荷 q 所激发的电场场强分布为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r ,$$

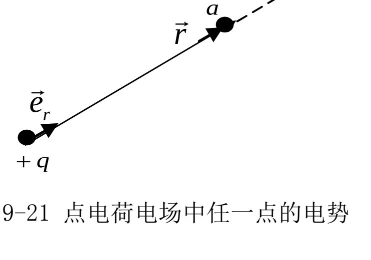


图 9-21 点电荷电场中任一点的电势

电场线是以点电荷 q 为中心呈辐射状。因电场力做功与路径无关，所以选取如图 9-21 所示从 q 出发经过待求电势的场点 a 伸向无限远的射线作为积分路径是最方便的。设点电荷 q 到 a 点距离为 r, 当 $\mathrm{d}\vec{l}$ 取 $\vec{r}$ 方向，有

$$V_a = \int_a^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9-23}$$

由此可见，在点电荷周围空间中任意一点的电势与该点离点电荷的距离 r 成反比。在正点电荷的电场中，各点电势均为正值，在负点电荷的电场中，各点的电势均为负值。

2 点电荷系的电势

若是点电荷系 q_1，q_2，$\cdots$，q_n 电场，任一点 a 的电势由场强叠加原理可知为

$$V_a = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^\infty \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^\infty \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^\infty \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \int_a^\infty \vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

$$V_a = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \tag{9-24}$$

式中 r_i 为第 i 个点电荷 q_i 到 a 点的距离。即点电荷系的电场中某点的电势等于各个点电荷单独存在时在该点所激发的电势的代数和。这一结论称为静电场的**电势叠加原理**。

3 连续分布电荷的电势

若一带电体上的电荷是连续分布的，可以把带电体分成无数电荷元 $\mathrm{d}q$ 的集合，r 为 $\mathrm{d}q$ 到给定点 a 的距离，则 a 点的电势为

$$V_a = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9-25}$$

积分遍及整个带电体。

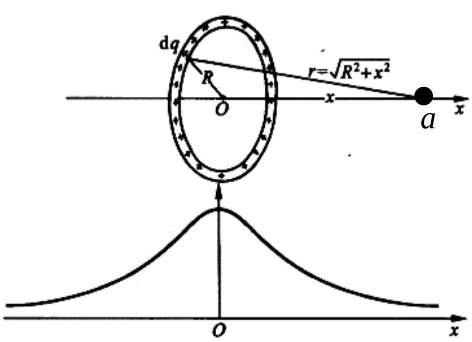


图 9-22 均匀带电圆环轴线上的电势

由上节电势的定义与本节的讨论, 可知求电场中的电势，通常有两种方法。

（1） 用电势定义 $V_a = \int_a^{零电势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，这种方法常用于已知电场分布，或利用高斯定理

很容易确定电场分布的情况。

（2） 用式（9-24）和式（9-25）所表达的电势叠加原理。

例 9-11 一半径为 R 的均匀带电细圆环，所带电量为 q，求在圆环轴线上任意点 a 的电势。

解 如图 9-22 所示，x 轴在圆环轴线上。

方法一:用电势定义

由**例 9-3** 圆环在其轴线上任一点产生的场强为

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ （$\vec{E}$ 与 x 轴平行）

$$V_a=\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

因为积分与路径无关，故可以选取沿 x 轴到无限远的路径。

$$V_a=\int_x^{\infty}\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}\left(R^2+x^2\right)}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

方法二：用电势叠加原理

把圆环分成一系列电荷元 $\mathrm{d}q$，每个电荷元视为点电荷，$\mathrm{d}q$ 在 a 点产生电势为

$$\mathrm{d}V_a=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

整个环在 a 点产生电势为

$$V_a=\int\mathrm{d}V_a=\int_q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

讨论 $x=0$ 处，$V_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，可见均匀带电圆环中心的电场强度为零，而电势却不为零。

例 9-12 求由均匀带电球面的电场中的电势分布。球面半径为 R，总带电量为 q。

解 由**例 9-7** 知均匀带电球面的场强分布为

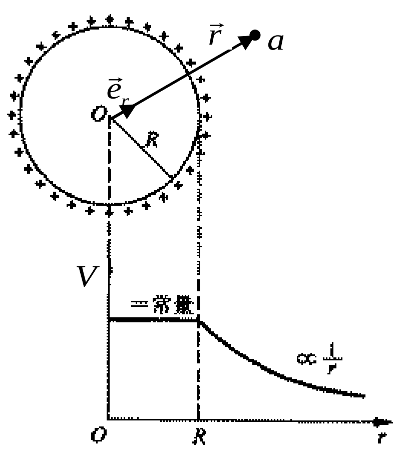


图 9-23 均匀带电球面的电势

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & (r>R)\\[2mm] 0 & (r<R)\end{cases}$$

$\vec{e}_r$ 为沿径矢方向的单位矢量。在使用电势定义进行积分时，应选取沿从球心发出的直线作为积分路径。

若 a 点在球面外（$r>R$）

$$V_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

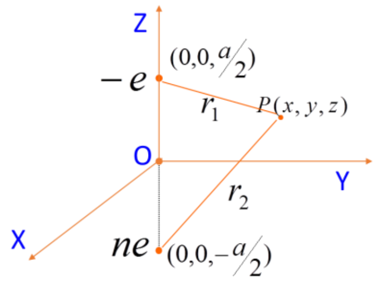
一个均匀带电球面在球外任一点电势和把全部电荷看作集中于球心的一个点电荷在该点的电势相同。

若 a 点在球面内（$r<R$），由于球面内外场强的函数关系不同，积分必须分段进行，

$$V_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^R 0\mathrm{d}r+\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

可见，球面内任一点电势与球面上的电势相等，均匀带电球面内的空间是等势的。V—r 曲线如图 9-23。

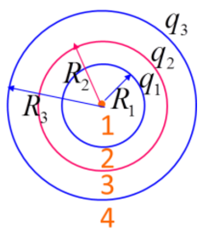
课堂训练：两个异号的点电荷 ne 和−e（n>1）。相距为 a，如图所示。求空间任一点的电势。



解：$P(x,y,z)$ 点的电势为：$V_P=\dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\dfrac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

即 $$V_p=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+a/2\right)^2}}-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-a/2\right)^2}}$$

课堂训练：三个同心带电导体球壳，半径分别为 R_1,R_2,R_3，求区域 1、2、3、4 电势分布。



解：方法一：由高斯定理得 $E_1=0\quad\left(r\le R_1\right)\qquad E_2=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad\left(R_1\le r\le R_2\right)$

$$E_3=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad\left(R_2\le r\le R_3\right)\qquad E_4=\frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad\left(r\ge R_3\right)$$

则 $V_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_1}E_1dr+\int_{R_1}^{R_2}E_2dr+\int_{R_2}^{R_3}E_3dr+\int_{R_3}^{\infty}E_4dr$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_2}E_2dr+\int_{R_2}^{R_3}E_3dr+\int_{R_3}^{\infty}E_4dr$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_3=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_3}E_3dr+\int_{R_3}^{\infty}E_4dr=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_4=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{\infty}E_4dr=\frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

方法二：

（1）区域 1，均处于球 1、球 2、球 3 之内

$$\therefore V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（2）区域 2，处于球 1 之外，球 2、球 3 之内

$$\therefore V_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

同理可得 V_3,V_4

9.4　电场强度与电势的关系

9.4.1 等势面

在电场中电势相等的点所构成的曲面称为**等势面**。为了直观地比较电场中各点的电势，画等势面时，使相邻等势面间的电势差为常量。这样等势面密集的地方场强大，稀疏的地方场强小。

不同的电荷分布的电场具有不同形状的等势面。如在距点电荷距离相等的点处电势是相等的，这些点构成的曲面是以点电荷为球心的球面。可见点电荷电场中的等势面是一系列同

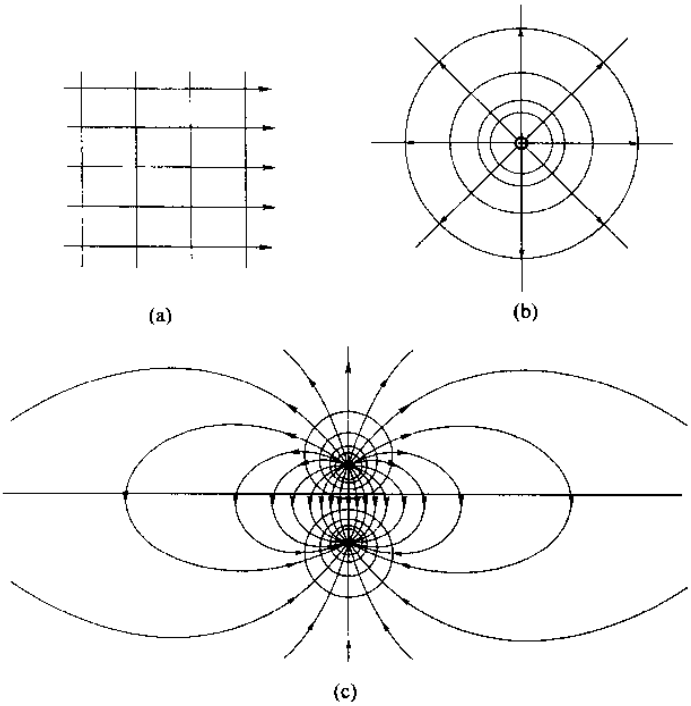


图 9-24 几种电荷分布的电场线与等势面

心的球面。图 9-24 给出了几种电场的等势面分布图。其中不带箭头的线为等势面与纸面的交线，带有箭头的线为电场线。图（a）为均匀电场的等势面，图（b）为点电荷电场的等势面，图（c）为等量正负点电荷电场的等势面。

根据等势面的定义可知它有下述性质：**1. 等势面与电场线处处垂直；2. 在等势面上移动电荷，电场力不做功。**

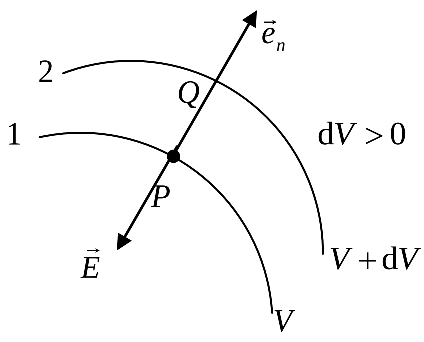


图 9-26 $\vec{E}$ 和 V 的微分关系

*9.4.2 电场强度与电势梯度的关系

电场强度和电势都是描述电场中各点性质的物理量，$V_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 表示了它们之间的积分关系，即电势等于电场强度的线积分。下面我们来研究它们之间的微分关系。如图 9-26 所示，设想在静电场中有两个靠得很近的等势面 1 和 2，电势分别为 V 和 $V+\mathrm{d}V$（设 $\mathrm{d}V>0$），P 为等势面 1 上的一点，在 P 点作等势面 1 的法线（等势面的法线正方向规定为指向电势升高的方向），以 $\mathrm{d}n$ 表示两等势面间在 P 点的法向，距离 $\overline{\mathrm{PQ}}$，由于等势面与电场线处处垂直，即电场强度与等势面法线平行，同时两个等势面

$$\left|\vec{E}_P\right| = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}$$

是如此靠近，可以把 P 附近的电场看作均匀场，$\mathrm{d}V = \left|\vec{E}_P\right| \mathrm{d}n$，或，

注意到 P 点的电场强度方向是从高电势指向低电势，与等势面在 P 点的正法线方向相反，有

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n \quad (9\text{-}26)$$

式中 $\vec{e}_n$ 是等势面的单位法线矢量，矢量 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n$ 的大小是等势面法线方向上的电势增加率，方向指向电势增加最快的方向，矢量 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n$ 称为P点的**电势梯度**，通常用符号 grad$V$ 表示,或者用▽V表示，即

$$\nabla V = \mathrm{grad}V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n \qquad (9\text{-}27)$$

结合式(9-26)和式(9-27)得

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (9\text{-}28)$$

式（9-28）表示，**电场中各点的电场强度，等于该点电势梯度的负值**，这就是**电场强度和电势的微分关系。**

讨论 1. 式（9-28）说明，电场中某点的电场强度只决定于该点电势的空间变化率，而与该点电势无直接关系。

2. ∇为**矢量微分算符**，在直角坐标系中，$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$，于是电场强度沿三个坐标轴的分量为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (9\text{-}29)$$

3. 因为电势是标量，与矢量 $\vec{E}$ 相比，一般来说容易求得，所以当我们要计算场强时，可先计算电势分布，然后利用式（9-28）或式（9-29）来计算场强。

例 9-13 用电场强度和电势的微分关系，求均匀带电细圆环轴线上任意点 a 的电场强度。

解 例 9-11 已求得均匀带电细圆环轴线上任意点 a 的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

由式（9-29） $$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

这与**例 9-3** 的计算结果相同。

作业：12、13、16