第 7 讲　　功　功率　动能定理　保守力的功

教学要求

理解质点的功、动能、势能，掌握动能定理。

重点与难点

重点：动能定理。

难点：保守力。

2.4 功　动能　势能　机械能守恒定律

本节讨论力对空间累积的效应，进而讨论功和能的关系。

2.4.1 功 功率

1. 功

（1）恒力的功

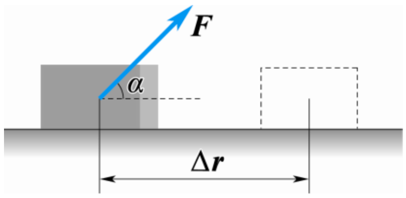


图 2-14　恒力的功

在力学中，功的最基本定义是恒力的功。

如图 2-14，一物体作直线运动，在恒力 $\vec{F}$ 作用下物体发生位移 $\Delta\vec{r}$，$\vec{F}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 的夹角为 α，则恒力 $\vec{F}$ 所做的功定义为：力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量）若用 W 表示功，则有

$$W = F\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha \qquad （2-29）$$

按矢量标积的定义，上式可写为

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \qquad （2-30）$$

即恒力的功等于力与质点位移的标积。

功是标量，没有方向，但有正负。当 $0 \le \alpha < 90^0$ 时，$\cos\alpha > 0$，力对物体做正功；当 $\alpha = 90^0$ 时，$\cos\alpha = 0$，力对物体不做功；当 $90^0 < \alpha \le 180^0$ 时，$\cos\alpha < 0$，力对物体做负功，或者说物体克服外力做功。

(2)变力的功

如果物体受到变力作用或作曲线运动，那么上面所讨论的功的计算公式就不能直接套

用。如果将运动的轨迹曲线分割成许许多多足够小的**元位移** $\mathrm{d}\vec{r}$，使得每段元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$ 中，作用在质点上的力 $\vec{F}$ 都能看成恒力，如图 2-15，则力 $\vec{F}$ 在这段元位移上所做的元功为

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

质点从 a 运动到 b，力 $\vec{F}$ 所做的总功为

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \int_a^b F_\tau ds \qquad (2\text{-}31)$$

式中 $\mathrm{d}s = \left|d\vec{r}\right|$，$F_\tau$ 是力 $\vec{F}$ 在元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$ 方向上的投影。式（2-31）就是计算变力做功的一般方法。

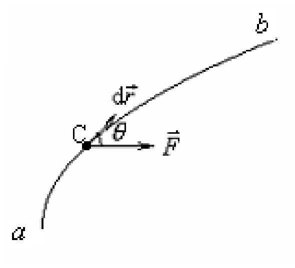


图 2-15　变力的功

说明 1） 如果把式 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ 写成 $\mathrm{d}W = F(\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta)$，那么功也可以说成：**力对质点所做的功为元位移在力方向的分量和力的大小的乘积**，这一叙述与上面的定义是等价的。从功的两种表述可以看出，功是力对空间位移的累积效应。

2) 功和质点经历的路径有关，即功是过程量。

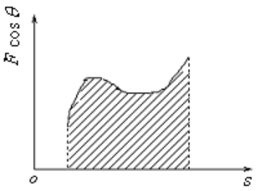


图 2-16 功的图示

3) **功的图示**　如用纵坐标表示作用在质点上的力在位移方向的分量 $F\cos\theta$，横坐标表示质点沿曲线运动的路程 s（$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$），作出 $F\cos\theta$ 随路程变化的函数关系，曲线下阴影部分的面积等于力所做的功（图 2-16）。

4) 功在直角坐标系中的计算

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\,,\quad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

元功可写成

$$\mathrm{d}W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

则

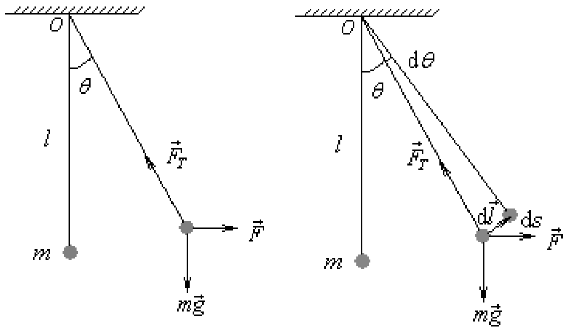
$$W = \int \mathrm{d}W = \int_a^b (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z) \qquad (2\text{-}32)$$

如质点作直线运动从 a 运动到 b，则

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \qquad (2\text{-}33)$$

5）功的计算步骤：确定求哪个力的功，并写出该力随位置变化的关系式；选定积分变量，写出元功 $\mathrm{d}W$ 的表达式；确定积分限进行积分。

例 2-8 如图 2-17(a)所示，质量为m的小球系于长为l的细绳末端，细绳的另一端固定在点O。现将小球在水平拉力$\vec{F}$的作用下，缓慢地从竖直位置移到细绳与竖直方向成θ角的位置。求水平拉力$\vec{F}$所作的功(不考虑空气阻力)。



(a) (b)

图 2-17 例 2-8 图

解 由于小球是缓慢移动的，所以在任意位置处小球所受的重力$m\vec{g}$、细绳的张力$\vec{F}_T$和拉力$\vec{F}$三个力始终平衡，即

$$\vec{F}_T+\vec{F}+m\vec{g}=0$$

写成分量形式有

$$F_T\sin\theta=F$$

$$F_T\cos\theta=mg$$

则 $$F=mg\tan\theta$$

可见，水平拉力$\vec{F}$的大小随偏角θ的增大而增大，不恒定。如图 2-17(b)，设小球在偏离竖直方向θ角的位置上作微小位移$\mathrm{d}\vec{l}$，则拉力$\vec{F}$做的元功

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=F\cos\theta\mathrm{d}s=F\cos\theta l\mathrm{d}\theta$$

式中$\mathrm{d}s$是位移$\mathrm{d}\vec{l}$所对应的弧长。由竖直位置到偏角为θ的过程中，拉力$\vec{F}$做的功

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_0^\theta F\cos\theta l\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta mgl\tan\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta mgl\sin\theta\mathrm{d}\theta=mgl(1-\cos\theta)$$

例 2-9 质点所受外力 $\vec{F}=\left(y^2-x^2\right)\vec{i}+3xy\vec{j}$ ，求质点由点(0,0)运动到点(2,4)的过程中力$\vec{F}$所做的功:(1)先沿x轴由点(0,0)运动到点(2,0)，再平行y轴由点(2,0)运动到点(2,4)；(2)沿连接(0,0)，(2,4)两点的直线；(3)沿抛物线 $y=x^2$ 由点(0,0)到点(2,4)(单位为国际单位制).

解 (1)由点(0,0)沿x轴到(2,0)，此时y=0， dy=0，所以

$$W_1=\int_0^2F_x\mathrm{d}x=\int_0^2(-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{8}{3}\ \ J$$

平行y轴由点(2,0)运动到点(2,4)此时x=2， dx=0，所以

$$W_2=\int_0^4F_y\mathrm{d}y=\int_0^4 6y\mathrm{d}y=48\ \ J$$

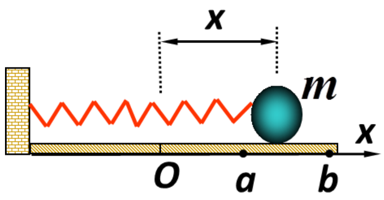
$$W=W_1+W_2=45\frac{1}{3}\ J$$

(2)因为由原点到点(2,4)的直线方程为y=2x，所以

$$W=\int_0^2 f_x \mathrm{d}x+\int_0^4 f_y \mathrm{d}y=\int_0^2 (4x^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^4 \frac{3}{2}y^2\mathrm{d}y=40\ J$$

(3) 因为 $y=x^2$，所以 $\quad W=\int_0^2 (x^4-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^4 3y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=42\frac{2}{15}\ \ J$

课堂训练：弹簧一端固定，另一端 与质点相连.弹簧劲度系数为 k 求质点由 x_0 运动至 x_1 时弹簧弹性力所做的功. Ox 坐标系原点位于弹簧自由伸展时质点所在位置.



解 弹性力 $\quad F_x=-kx$

$$W=\int_{x_0}^{x_1}(-kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx_0{}^2-\frac{1}{2}kx_1{}^2)$$

x_0 x_1 为任意起始位置，与路径无关.

2 功率

在实际问题中，除了要知道一个力做功的大小，还要知道力做功的快慢。定义**单位时间内力所作的功**叫做**功率**，用 P 表示。

（1）平均功率

设 Δt 时间内完成功 ΔW ，则这段时间的平均功率为

$$\bar{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (2\text{-}34)$$

（2）瞬时功率

当 $\Delta t\to 0$ 时，则某一时刻的瞬时功率为

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (2\text{-}35)$$

即**功率等于力与速度的标积，或功率等于力的切向分量与速度大小的乘积。**

3 保守力的功

下面通过分析计算重力、万有引力、弹簧弹性力做功的特点，引入保守力的概念。

（1） 重力的功

我们这里讨论的重力是指地面附近几百米高度范围

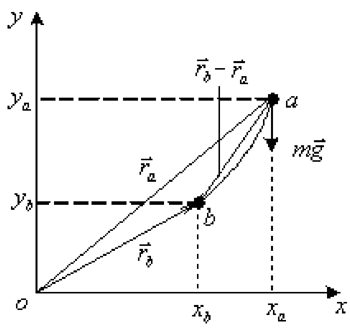


图 2-18 重力做功

内的重力，就是说这里所指的重力可视为恒力。如图 2-18 所示，质点m在重力场中由点a沿任意路径运动到点b，a、b两点的位矢分别是$\vec{r}_a$、$\vec{r}_b$，在这一过程中，重力做的功

$$W=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{G}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

由于$\vec{G}$是恒力，所以$W=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{G}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\vec{G}\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_a)$

考虑到在直角坐标系中：$\vec{G}=-mg\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{r}_b-\vec{r}_a&=(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k})-(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})\\&=(x_b-x_a)\vec{i}+(y_b-y_a)\vec{j}+\left(z_b-z_a\right)\vec{k}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}W&=\vec{G}\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_a)\\&=-mg\vec{j}\cdot[(x_b-x_a)\vec{i}+(y_b-y_a)\vec{j}+\left(z_b-z_a\right)\vec{k}]\qquad (2\text{-}36)\\&=-mg(y_b-y_a)\end{aligned}$$

可见重力做功的特点是**重力功只与物体运动路径始、末位置有关，而与经过的路径无关**。

（2） 万有引力的功

如图 2-17 所示，设质量为m的质点，在另一质量为M的质点的引力场中，沿任意路径从点a运动到点b。如取M的位置为坐标原点，a、b两点距M的距离分别为r_a、r_b，m在某时刻的位矢为$\vec{r}$，则m受M的万有引力

$$\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

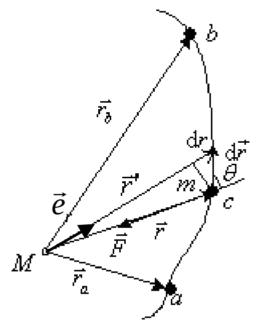


图 2-17 万有引力的功

式中$\vec{e}_r$是位矢$\vec{r}$的单位矢量。当m沿路径移动元位移$\mathrm{d}\vec{r}$时，万有引力的元功

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

由图可见 $\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\left|\vec{e}_r\right|\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\mathrm{d}r$，$\mathrm{d}r$是质点$m$径向距离的增量。于是上式为

$$\mathrm{d}W=-\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

质点在沿任一路径从点a运动到点b的过程中，万有引力做的功

$$W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{r_a}^{r_b}-\frac{GMm}{r^2}dr=-GMm(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}) \quad (2\text{-}37)$$

可见万有引力功的特点是**万有引力做的功只与物体路径始、末的位置有关，而与其经过的路径无关**。

（3） 弹簧弹性力的功

如图 2-18，将原长为l、劲度系数为k的弹簧与质量为m的质点连接（这样的系统称为**弹簧振子**）并放在光滑的水平面上，弹簧的一端固定。

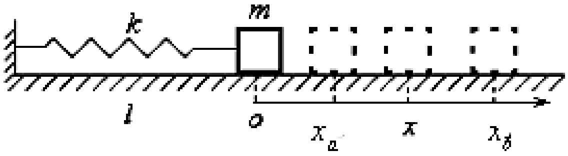


图 2-18 弹力做功

以弹簧自然伸长时的自由端即系统的**平衡位置**（物体处于此位置时，受力为零）为坐标原点，建立如图所示的一维坐标系。则当质点处于任一位置x时，所受的弹性力

$$F=-kx$$

式中k为弹簧的劲度系数，负号表示弹性力的方向与质点位移的方向相反。质点从x_a运动到x_b，弹性力做功

$$W=\int_{x_a}^{x_b}F dx=\int_{x_a}^{x_b}(-kx)dx=-\frac{1}{2}k(x_b^2-x_a^2) \quad (2\text{-}38)$$

可见弹性力做功的特点是**弹性力做的功只与路径始、末的位置有关，而与其经过的路径无关**。

（4）保守力

由以上分析计算可知,重力、万有引力、弹性力（还有静电力、分子力等）都有一个共同的特点：它们对物体做的功与具体路径无关，只由物体始末位置决定。具有这种性质的力称为**保守力**，如果物体运动的路径是一闭合回路，那么始末位置相同，保守力$\vec{F}$做的功为零，即

$$\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{r}=0 \quad (2\text{-}39)$$

所以保守力可以等价地定义为**沿任意闭合路径做功为零的力**，否则就是非保守力。由此可知，重力、万有引力、弹性力都是保守力，而摩擦力、流体阻力等则是非保守力。

2.4.2 动能定理

现在讨论力对物体做功后，物体的运动状态将发生的变化。

设质点m在合力$\vec{F}$的作用下，自点a沿曲线运动到点b，在两点的速率分别为υ_0和υ（如图 2-19）。在任意c点发生位移$\mathrm{d}\vec{r}$，合力$\vec{F}$对质点m所做的元功

$$\mathrm{d}W=(F\cos\theta)\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

由牛顿第二定律

$$F\cos\theta=ma_t=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}W=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=m\frac{\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\upsilon=m\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

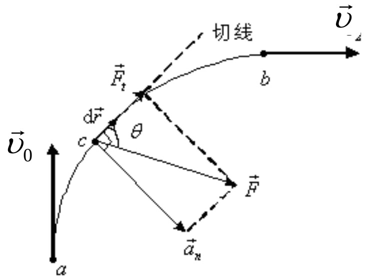


图 2-19 质点动能定理推导

对上式积分，则得到合力$\vec{F}$在这一过程中的功

$$W=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}m\upsilon\mathrm{d}\upsilon=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \qquad (2\text{-}40)$$

定义：$\frac{1}{2}m\upsilon^2$为物体的动能，用E_k表示，即

$$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad (2\text{-}41)$$

则有

$$W=E_k-E_{k0}=\Delta E_k \qquad (2\text{-}42)$$

式（2-40）表明：**合力对质点所做的功，等于质点动能的增量**，这个结论称为**质点的动能定理**。E_{k0}和E_k分别为质点的始、末动能。

说明 1 W是合力所做的功，也等于各力所做功的代数和。

2 动量定理，将质点动量的变化与力的冲量建立了联系。冲量是力$\vec{F}$的时间积分，体现力对时间的累积作用。动能定理将质点动能的变化与力做的功建立了联系，而功则是力$\vec{F}$的空间积分，体现力对空间的累积作用。

3 动能定理适用于惯性系，式中速度均应相对于同一惯性系。

4 应用动能定理解题步骤：（1）明确研究对象；（2）分析物体在过程中受到的全部力做功情况，并加以计算；（3）列出始、末状态动能的表达式；（4）运用动能定理列方程求解。

例 2-10 一质量为 10kg 的物体沿x轴无摩擦地滑动，$t=0$时物体静止于原点，(1)若物体在力$F=3+4t$ N 的作用下运动了 3s，它的速度增为多大？(2)物体在力$F=3+4x$ N 的作用下移动了 3m，它的速度增为多大？

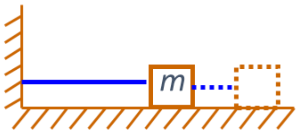
解：(1)由动量定理$\int_0^t Fdt=mv$，得

$$v=\int_0^t\frac{F}{m}\mathrm{d}t=\int_0^3\frac{3+4t}{10}\mathrm{d}t=2.7\,m/s$$

(2) 由动能定理 $\int_0^x F dx = \frac{1}{2}mv^2$，得

$$v = \sqrt{\int_0^x \frac{2F}{m}\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^3 \frac{2(3+4x)}{10}\mathrm{d}x} = 2.3\ m/s$$

课堂训练： 如图，物块质量 m 置于粗糙水平面上，用橡皮绳系于墙上，橡皮绳原长 a，拉伸时相当于劲度系数为 k 的弹簧，现将物块向右拉伸至橡皮绳长为 b 后再由静止释放．求物块击墙的速度．物块与水平面间的摩擦系数为 μ.



解： 弹力只存在于 $b \to a$ 过程，摩擦力始终存在，由动能定理有： $(v_0 = 0)$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\mu mgb + \int_b^a -k(x-a)\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{2}k(b-a)^2 - \mu mgb$$

$$\therefore v = \left[\frac{k}{m}(b-a)^2 - 2\mu gb\right]^{\frac{1}{2}}$$

作业：1、2、17