# 第 6 讲　动量定理 动量守恒定律

**教学要求**

理解动量。掌握动量定理、动量守恒定律。

**重点与难点**

**重点：**动量定理。

**难点：**动量守恒定律。

## 2.3 动量定理 动量守恒定律

本节将从力的时间和空间积累效应出发，根据牛顿运动定律，导出动量定理、动能定理这两条运动定理，并且将进一步讨论动量守恒、能量转换与守恒，对于求解质点力学问题，在一定条件下运用这两条运动定理和守恒律，比直接运用牛顿运动定律往往更为方便。

### 2.3.1 质点的动量定理

牛顿在《自然哲学之数学原理》中研究碰撞过程中所建立起来的牛顿第二定律并不是大家熟知的式（2-1），他所选择的是

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (2\text{-}9)$$

只因在牛顿力学中，物体的质量可视为常数，式（2-1）在形式上与式（2-9）等价。由近代物理知识可知，惯性质量与物体的运动状态有关，不能看成常数。从近代物理观点来看，式（2-9）具有更广泛的适应性。

定义质点的质量 $m$ 与速度 $\vec{\upsilon}$ 的乘积，称为**质点的动量**，即

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon} \qquad (2\text{-}10)$$

**说明** 1.动量是矢量，方向与质点速度的方向一致。

2.动量是相对量，与参考点的选择有关。

在国际单位制中，动量的单位为千克·米/秒（kg·m/s）。

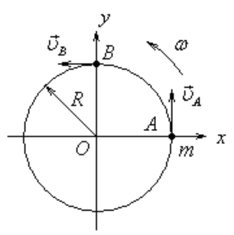


图 2-7 问题 2-2 图

那么式（2-9）可写成

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad (2\text{-}11)$$

式（2-11）应理解为“**物体的动量对时间的变化率与所加的外力成正比,并且发生在这外力的方向上**”。

将式（2-11）变形为$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$并从$t_0$到$t$这段有限时间内进行积分，即得

$$\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}-\vec{p}_0 \qquad （2\text{-}12）$$

左侧积分表示外力$\vec{F}$在时间$t_0-t$内的累积效应，叫作力的**冲量，** 记作$\vec{I}$，即

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t \qquad （2\text{-}13）$$

于是有

$$\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0 \qquad （2\text{-}14）$$

式（2-14）表明：**在一段时间内，质点动量的增量等于在这段时间内合外力作用在该质点上的冲量**，此即**质点的动量定理**。

式（2-14）是动量定理的矢量形式，在直角坐标系中的分量式为

$$\begin{aligned} I_x&=\int_{t_0}^{t}F_x\mathrm{d}t=p_x-p_{0x}\\ I_y&=\int_{t_0}^{t}F_y\mathrm{d}t=p_y-p_{0y}\\ I_z&=\int_{t_0}^{t}F_z\mathrm{d}t=p_z-p_{0z}\end{aligned} \qquad （2\text{-}15）$$

**讨论 1.** 关于冲量的理解与计算。

（1）定理中力的冲量指的是质点所受合力的冲量，或者质点所受冲量的矢量和。设质点受$n$个力的作用，则合力的冲量

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{合}\,\mathrm{d}t==\int_{t_0}^{t}\vec{F}_1\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t}\vec{F}_2\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_0}^{t}\vec{F}_n\mathrm{d}t=\vec{I}_1+\vec{I}_2+\cdots+\vec{I}_n=\sum_i\vec{I}_i$$

（2）定理中冲量的方向一般不是某一瞬时力$\vec{F}$的方向，而是所有元冲量$\vec{F}\mathrm{d}t$的合矢量$\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t$的方向。

（3）若力$\vec{F}$是恒力，则$\vec{I}=\vec{F}(t-t_0)$。

**2.** 动量定理适用于惯性系，使用动量定理时,所涉及速度必须是相对于同一惯性系。

**3.** 动量定理的应用意义

（1）冲量是过程量，动量是状态量，**不管物体在运动过程中动量变化的细节如何,冲量总等于物体始末动量的矢量差**,从而将过程量的计算转变为状态量的变化，而不必考虑过程中复杂的具体细节；

（2）动量定理在打击或碰撞问题中用来求平均力。在讨论质点间碰撞等问题时，物体

间的相互作用力往往很大而作用时间很短，称为**冲击力**。冲击力的函数关系较复杂，使表示瞬时关系的牛顿第二定律无法直接应用。但冲量的大小及方向只与质点运动的始、末状态有关，而无须考虑碰撞过程中动量变化的细节。因此，动量定理解决碰撞等问题时比牛顿第二定律更优越。通过测定某一过程前后动量 $\vec{p}_0$ 和 $\vec{p}$，应用 $|\Delta\vec{p}|=|\vec{I}|=|\bar{\vec{F}}|\cdot\Delta t$，得 $|\bar{\vec{F}}|=\dfrac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t}$。

**例 2-5** 如图 2-8 一弹性球，质量 $m$＝0.20kg，速度 $v$ ＝5m/s，与墙碰撞后弹回.设弹回时速度大小不变，碰撞前后的运动方向和墙的法线所夹的角都是 $\alpha$，设球和墙碰撞的时间 $\Delta t$＝0.05s，$\alpha$＝60°，求在碰撞时间内，球和墙的平均相互作用力.

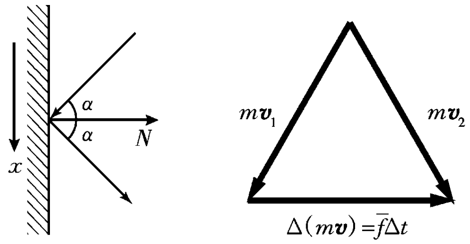



图 2-8 例 2-5 图

**解** 以球为研究对象.设墙对球的平均作用力为 $\bar{\vec{f}}$，球在碰撞前后的速度为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，由动量定理可得

$$\bar{\vec{f}}\Delta t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=m\Delta\vec{v}$$

将冲量和动量分别沿图中 $N$ 和 $x$ 两方向分解得：

$$\bar{f}_x\Delta t=mv\sin\alpha-mv\sin\alpha=0$$

$$\bar{f}_N\Delta t=mv\cos\alpha-(-mv\cos\alpha)=2mv\cos\alpha$$

$$\therefore\quad \bar{f}_x=0$$

$$\bar{f}_N=\frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}=\frac{2\times0.2\times5\times0.5}{0.05}=20\ N$$

按牛顿第三定律，球对墙的平均作用力和 $\bar{f}_N$ 的方向相反而等值，即垂直于墙面向里。

**例 2-6** 如图 2-9 所示，一辆装矿砂的车厢以 $v$＝4m/s 的速率从漏斗下通过，每秒落入车厢的矿砂为 $k$＝200 kg/s，如欲使车厢保持速率不变，须施与车厢多大的牵引力(忽略车厢与地面的摩擦)？

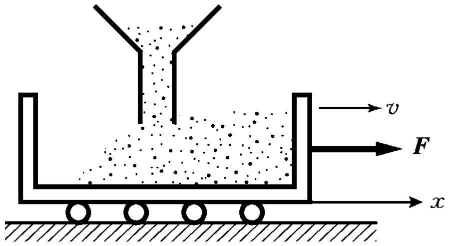



图 2-9 例 2-6 图

**解**：设 $t$ 时刻已落入车厢的矿砂质量为 $m$，经过 $\mathrm{d}t$ 后又有 $\mathrm{d}m=k\mathrm{d}t$ 的矿砂落入车厢. 取 $m$ 和 $\mathrm{d}m$ 为研究对象，则系统沿 $x$ 方向的动量定理为

$$F\mathrm{d}t=(m+\mathrm{d}m)v-(mv+\mathrm{d}m\cdot 0)=v\mathrm{d}m=k\mathrm{d}tv$$

$$\therefore\ F=kv=200\times 4=8\times 10^2\quad N$$

**课堂训练：**火箭沿直线匀速飞行，喷射出的燃料生成物的密度为$\rho$ ，喷口截面积为 $S$，喷气速度(相对于火箭的速度)为 $v$ ，求火箭所受推力.

解： 选择匀速直线运动的火箭为参考系，是惯性系.

dt 时间内喷出气体质量 $\mathrm{d}m=\rho vS\mathrm{d}t$

dm 喷出前后动量改变量为 $\mathrm{d}\vec{p}=\rho vS\mathrm{d}t\cdot\vec{v}$

由动量定理 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\rho vS\vec{v}=\vec{F}$

$\vec{F}$ 表示留在燃烧室内的燃烧物质对排出物质的作用力

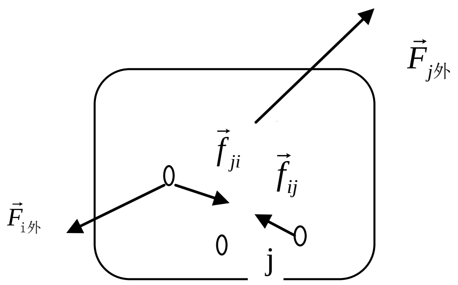
$F_x=\rho Sv^2$ 向下

火箭所受推力，也等于 $\rho Sv^2$ 向上

## 2.3.2 质点系的动量定理

由相互作用的若干个质点组成的系统称为质点系。一个不能抽象为质点的物体也可认为是由多个（直至无限个）质点所组成，从这种意义上讲，力学又可分为质点力学和质点系力学。从现在开始将多次涉及质点系力学的某些内容。

当研究对象是质点系时，其受力就可分为内力和外力。凡质点系内各质点间的相互作用力称为**内力**，用 $\vec{f}_{ij}$ 表示，质点系以外物体对质点系内各质点间的作用力称为**外力**，用 $\vec{F}_{i外}$ 表示，如图 2－10 所示。根据牛顿第三定律，系统内的各个内力总是以作用力和反作用力的形式成对出现的，且每对作用内力都必沿两质点连线的方向。这些就是研究质点系力学的基本观点。




设质点系是由相互作用的 $n$ 个质点组成,现考察第 $i$ 个质点的受力情况，首先考察 $i$ 质点所受内力之

矢量和，设质点系内第 $j$ 个质点对　　　　　　图 2－10 内力示意图

$i$ 质点的作用力为 $\vec{f}_{ji}$ ，则 $i$ 质点所受内力为

$$\sum_{j=1\,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji} \qquad (2\text{-}16)$$

若设 $i$ 质点受到的外力为 $\vec{F}_{i外}$，则 $i$ 质点受到的合力为 $\vec{F}_{i外}+\sum\limits_{j=1\,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}$，对 $i$ 质点运用动量定理有

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{i外}dt+\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{j=1\,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji})dt=m_i\vec{v}_{i2}-m_i\vec{v}_{i1} \qquad (2\text{-}17)$$

对 $i$ 求和，并考虑到所有质点相互作用的时间 $dt$ 都相同，此外，求和与积分顺序可互换，于是得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji})dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}$$

由于内力总是成对出现，且每对内力都等值反向，因此所有内力的矢量和

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\,j\neq i}^{n}\vec{f}_{ji}=0$$

于是有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1} \qquad (2\text{-}18)$$

这就是**质点系动量定理**的数学表示式，即作用于质点系的合外力的冲量等于系统内质点总动量的增量。这个结论说明内力对系统的总动量无贡献，但对每个质点动量的增减是有影响的。

**课堂讨论：**问：为什么迅速地把盖在杯上的薄板从侧面打去，鸡蛋就掉在杯中；慢慢地将薄板拉开，鸡蛋就会和薄板一起移动？

答：因为鸡蛋和薄板间的摩擦力有限，若棒打击时间很短，所以鸡蛋就掉在杯中.

$$\because \vec{F}_f\Delta t\to 0,\therefore \Delta\vec{P}_{蛋}\to 0$$

### 2.3.3 质点系动量守恒定律

由式（2-18）知，若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}=0$ ，则有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i1}=0 \qquad (2\text{-}19)$$

亦即　　当 $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}=0$ 时，$\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i=$常矢量　　（2-20）

这就是说：**一个孤立的力学系统（即无外力作用的系统）或合外力为零的系统，系统内各质点动量可以交换，但系统的总动量保持不变。这就是动量守恒定律。**

式（2-20）是动量守恒定律的矢量表达式，在直角坐标系中，其分量形式为

$$\begin{aligned}
&当 F_x=0 时，\sum_i m_i\upsilon_{ix}=p_x =常量\\
&当 F_y=0 时，\sum_i m_i\upsilon_{iy}=p_y =常量 \qquad (2\text{-}21)\\
&当 F_z=0 时，\sum_i m_i\upsilon_{iz}=p_z =常量
\end{aligned}$$

由此可见，**如果系统沿某坐标方向所受合外力为零，则沿此坐标方向的总动量分量守恒。**

**注意 1** 动量守恒是指系统内各质点动量的矢量总和保持不变，但每个质点的动量可能会发生变化。

**2** 系统动量守恒的条件是合外力为零。在碰撞、打击、爆炸等过程中，因为物体相互作用时间极短，相互作用内力很大，一般的外力（如空气阻力、摩擦力或重力）与内力相比往往可忽略外力，即认为系统的动量守恒；还有若 $\vec{F}\neq 0$, 但系统在某一方向上的合外力为零，则在该方向上动量守恒，即应用式(2-21)。

**3** 动量守恒定律只适用于惯性系，使用时所有速度必须相对于同一惯性系。

**4** 动量守恒定律是物理学中最普遍、最基本的定律之一。以上我们由牛顿定律出发导出了以式（2-20）表示的动量守恒定律。应该指出更普遍的动量守恒定律并不依赖牛顿运动定律。动量概念不仅适用于以速度 $\vec{\upsilon}$ 运动的质点或粒子，而且也适用于电磁场，只是对于后者，其动量不能再用 $m\vec{\upsilon}$ 这样的形式表示。考虑包括电磁场在内的系统所发生的过程时，其总动量也必须把电磁场的动量计算在内。不但对可以用作用力和反作用力描述其相互作用的质点系所发生的过程，动量守恒定律成立，而且大量实验证明，对其内部的相互作用不能用力的概念描述的系统所发生的过程，如光子和电子的碰撞，光子转化为电子，电子转化为光子，只要系统不受外界的影响，它们的动量都是守恒的。动量守恒定律是关于自然界一切物理过程普遍适用的规律。

应用动量定理和动量守恒定律解题一般步骤:

1.正确分析出始、末态的动量，并向选定的坐标轴进行投影。

2.列出坐标分量方程。由于动量是矢量,因此特别要注意始、末态动量在坐标轴上分量的正、负号。

**例 2-7** 如图 2-11 所示，一质量为 $m$ 的球在质量为 $M$ 的 1/4 圆弧形滑槽中从静止滑下. 设圆弧形槽的半径为 $R$，如所有摩擦都可忽略，求当小球 $m$ 滑到槽底时，$M$ 滑槽在水平上移动的距离.

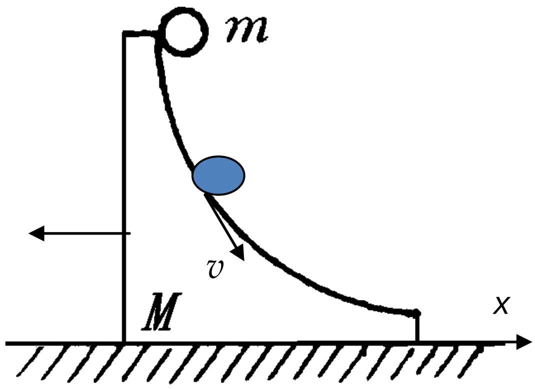



图 2-11 例 2-7 图

**解** 以 $m$ 和 $M$ 为研究系统，其在水平方向不受外力，故水平方向动量守恒. 设在下滑过程中，$m$ 相对于 $M$ 的滑动速度为 $v$，$M$ 对地速度为 $V$，并以水平向右为 $x$ 轴正向，则在水平方向上有

$$m(v_x - V) - MV = 0$$

解得

$$v_x = \frac{m+M}{m}V$$

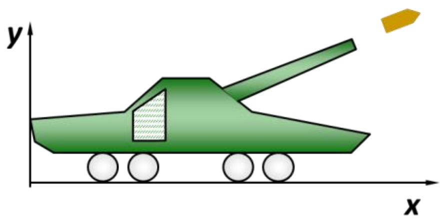
设 $m$ 在弧形槽上运动的时间为 $t$，而 $m$ 相对于 $M$ 在水平方向移动距离为 $R$，故有

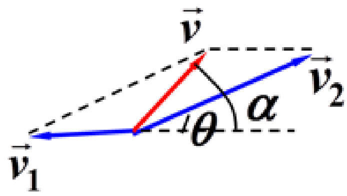
$$R = \int_0^t v_x dt = \frac{\mathrm{M+m}}{\mathrm{m}}\int_0^t V dt$$

于是滑槽在水平面上移动的距离

$$S = \int_0^t \mathrm{V}dt = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M+m}}R$$

**课堂训练：** 如图表示一战车，置于摩擦很小的铁轨上，车身质量为 $m_1$，炮弹质量为 $m_2$，炮筒与水平面夹角 $\theta$ 角. 炮弹以相对于炮口的速度为 $\vec{v}_2$ 射出，求炮身后坐速率 $\vec{v}_1$.




**解：** 本题铅直方向动量不守恒。水平方向动量守恒

炮弹相对于地面的速度 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$，由图得 $m_2(v_2\cos\theta - v_1) = m_1 v_1$

$$\Longrightarrow \quad v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_1}\cos\theta$$

作业：1、2、11，12