第 45 讲（1）　习题课

第 15 章 光的衍射

课程内容

15.1 光的衍射　惠更斯—菲涅耳原理

15.2 单缝夫琅禾费衍射

15.3 衍射光栅

15.4 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

15.5 X 射线的衍射

教学要求

了解菲涅耳衍射、夫琅和费衍射、惠更斯－菲涅耳原理；了解光栅光谱；X 射线的衍射；布拉格公式。

理解光的衍射现象；单缝的夫琅和费衍射；圆孔的夫琅和费衍射、瑞利准则、分辨律；理解光学仪器的分辨本领；理解光栅的分辨本领、干涉和衍射的区别和联系。

掌握光栅常量、明纹条件、暗纹条件、缺级。

重点与难点

重点：光栅常量、明纹条件、缺级。

难点：光的衍射现象。

15.1 光的衍射现象　惠更斯——菲涅耳原理

15.1.1 光的衍射现象及分类

衍射系统是由光源、衍射屏和接收屏组成，通常是根据三者相对位置的大小，把衍射现象分为两类。一类是光源、接收屏（或两者之一）与衍射物之间的距离有限远。这种衍射叫做**菲涅耳衍射**（或**近场衍射**）。

另一类是光源、接收屏与衍射物的距离都是无限远。这种衍射称为**夫琅禾费衍射**（或**远场衍射**）。在实验室中产生的夫琅禾费衍射通常利用两个会聚透镜来实现。

由于夫琅和费衍射在实际应用和理论上都十分重要，而且这类衍射的分析与计算都比菲涅耳衍射简单，因此本节只讨论只讨论夫琅和费衍射。

15.1.2 惠更斯——菲涅耳原理

15.2 单缝夫琅禾费衍射

现在用菲涅耳波半波带法来分析产生明暗纹的条件。

1 平行衍射光的获得

2 衍射条纹分布

3 菲涅耳半波带法

综上可知，可得如下结论：

$$\left.\begin{array}{l} a\sin\theta=\begin{cases}0 & \text{（中央明纹）}\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}\quad (k=1,2,\cdots) & \text{（明纹）}\end{cases} \\ a\sin\theta=\pm k\lambda \quad (k=1,2,3\cdots) \qquad \text{（暗纹）}\end{array}\right\} \qquad (15\text{-}1)$$

$\theta=0$ 称为中央亮纹，k=1, 2, …分别称为第一，二，…级明纹（或暗纹）。式（15-1）中的正、负号表示条纹对称分布于中央明纹的两侧。

对于任意衍射角θ来说，AB 一般不能恰巧分成整数个半波带，即 BC 不等于$\dfrac{\lambda}{2}$的整数倍，此时衍射光束经透镜聚焦后，形成屏幕上亮度介于最明和最暗之间的中间区域。

4 衍射条纹特征

（1）明纹与暗纹的位置

$$x_k=f\tan\theta_k\approx f\sin\theta_k=\begin{cases}fk\dfrac{\lambda}{a} & \text{(暗纹)}\\ f(2k+1)\dfrac{\lambda}{2a} & \text{(明纹)}\end{cases}$$

（2）明纹宽度

衍射角θ_1为**中央明纹的半角宽度**

$$\theta_1=\arcsin\frac{\lambda}{a} \qquad (15\text{-}2)$$

中央明纹宽度（两个第一级暗纹间距离）

$$l_0=2x_1=2f\tan\theta_1 \qquad (15\text{-}3)$$

当θ_1很小时 $\qquad \theta_1\approx\dfrac{\lambda}{a} \qquad l_0=2f\tan\theta_1\approx 2f\sin\theta_1=\dfrac{2\lambda f}{a}$

其它明纹宽度（相邻暗纹之距）

$$l = x_{k+1} - x_k = f\tan\theta_{k+1} - f\tan\theta_k$$

衍射角较小时 $$l \approx \frac{\lambda f}{a}$$

即中央明纹为较小级数明纹宽度的 2 倍。

4 单缝衍射明纹的光强分布

15.3 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领

15.3.1 圆孔的夫琅禾费衍射

15.3.2 光学仪器的分辨本领

在光学中，光学仪器最小分辨角的倒数称为这仪器的分辨本领（或分辨率）R，当 θ_0 很小时

$$R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda} \tag{15-6}$$

15.4 衍射光栅

15.4.1 光栅衍射现象

15.4.2 光栅衍射规律

1 光栅方程

$$(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{15-7}$$

式(15-7)称为**光栅方程。**φ 的正负规定与单缝情形相同。k 为明条纹级数。这些明条纹细窄而明亮，通常将明纹称为主极大条纹。k=0 为零级主极大，也称为**中央明纹**。k=1, 2, …，称为第一级主极大、第二级主极大……，其余类推。式(15-7)中的正负号表示各级明条纹对称分布在中央明纹两侧。从光栅方程可以看出，在波长一定的单色光照射下，光栅常数 $(a+b)$ 越小，各级明条纹的 φ 角越大，因而相邻两个明条纹分得越开。

光线斜入射时的光栅方程应为

$$(a+b)(\sin\varphi \pm \sin\theta) = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{15-8}$$

式中 φ 表示衍射方向与法线间的夹角，均取正值，当 φ 与 θ 在法线同侧，上式左边括号中取

加号，在异侧时取减号。

2 明条纹

3 暗纹条件

4 单缝衍射对光强分布的影响

5 缺级现象

缺级条件为

$$k=\frac{a+b}{a}k' \qquad (k'=1,2,\cdots) \tag{15-11}$$

且满足 k 为整数，即 $(a+b)/a$ 为整数比（如 2：1，3：2 等等）。如 $d=4a$ 时，k=4, 8，…，缺级。

15.4.3 光栅光谱

例 1 填空题

（1）将波长为λ的平行单色光垂直投射于一狭缝上，若对应于衍射图样的第一级暗纹位置的衍射角的绝对值为θ，则缝的宽度等于________________.

[答案：$\lambda/\sin\theta$]

（2）波长为λ的单色光垂直入射在缝宽 a=4 λ 的单缝上．对应于衍射角φ=30°，单缝处的波面可划分为______________个半波带。

[答案：4]

（3）在夫琅禾费单缝衍射实验中，当缝宽变窄，则衍射条纹变____；当入射波长变长时，则衍射条纹变________。（填疏或密）

[答案：变疏，变疏]

（4）在单缝夫琅禾费衍射实验中，设第一级暗纹的衍射角很小，若钠黄光（$\lambda_1=589nm$）中央明条纹为 $4.0nm$，则$\lambda_2=442nm$（$1nm=10^{-9}m$）的蓝紫色光的中央明纹宽度为_________nm。

[答案：$3.0nm$]

（5）在透光缝数为 N 的平面光栅的衍射实验中，中央主极大的光强是单缝衍射中央主极大光强的_____________倍，通过 N 个缝的总能量是通过单缝的能量的_____________倍。

[答案：N^2，N]

例 2 选择题

（1）在夫琅禾费单缝衍射实验中，对于给定的入射单色光，当缝宽度变小时，除中央亮纹的中心位置不变外，各级衍射条纹[　　　　]

(A) 对应的衍射角变小．　　　　(B) 对应的衍射角变大．

(C) 对应的衍射角也不变.　　　　　(D) 光强也不变.

[答案：B]

（2）波长λ=500 nm (1nm=10^{-9}m)的单色光垂直照射到宽度 a=0.25mm 的单缝上，单缝后面放一凸透镜，在凸透镜的焦平面上放置一屏幕，用以观测衍射条纹。今测得屏幕上中央明条纹一侧第三个暗条纹和另一侧第三个暗条纹之间的距离为 d=12mm，则凸透镜的焦距是[　　　　]

(A)2m.　(B)1m.　(C)0.5m.　(D)0.2m.　(E)0.1m

[答案：B]

（3）波长为λ的单色光垂直入射于光栅常数为 d、缝宽为 a、总缝数为 N 的光栅上．取 k=0，±1，±2....，则决定出现主极大的衍射角θ的公式可写成[　　　　]

(A) $N a \sin\theta=k\lambda$.　(B) $a \sin\theta=k\lambda$.　(C) $N d \sin\theta=k\lambda$.　(D) $d \sin\theta=k\lambda$.

[答案：D]

（4）设光栅平面、透镜均与屏幕平行。则当入射的平行单色光从垂直于光栅平面入射变为斜入射时，能观察到的光谱线的最高级次 k [　　　　]

(A)变小。　(B)变大。　(C)不变。　(D)的改变无法确定。

[答案：B]

（5）在光栅光谱中，假如所有偶数级次的主极大都恰好在单缝衍射的暗纹方向上，因而实际上不出现，那么此光栅每个透光缝宽度 a 和相邻两缝间不透光部分宽度 b 的关系为[　　　　]

(A) $a=0.5b$　(B) $a=b$　(C) $a=2b$　(D)$a=3b$

[答案：B]

例 3 试指出当衍射光栅的光栅常数为下述三种情况时，哪些级次的衍射明条纹缺级?(1)a+b=2a;(2)a+b=3a;(3)a+b=4a.

解：由光栅明纹条件和单缝衍射暗纹条件同时满足时，出现缺级．即

$$\begin{cases}(a+b)\sin\varphi=\pm k\lambda & (k=0,1,2,\cdots)\\ a\sin\varphi=\pm k'\lambda & (k'=1,2\cdots)\end{cases}$$

可知，当$k=\dfrac{a+b}{a}k'$时明纹缺级.

(1) $a+b=2a$ 时，$k=2,4,6,\cdots$偶数级缺级；

(2) $a+b=3a$ 时，$k=3,6,9,\cdots$级次缺级；

(3) $a+b=4a$，$k=4,8,12,\cdots$级次缺级.

例 4　一单色平行光垂直照射一单缝，若其第三级明条纹位置正好与6000 $\mathring{A}$ 的单色平行光的第二级明条纹位置重合，求前一种单色光的波长.

解：单缝衍射的明纹公式为

$$a\sin\varphi=(2k+1)\ \frac{\lambda}{2}$$

当 $\lambda=6000$ $\mathring{A}$ 时，$k=2$，$\lambda=\lambda_x$ 时，$k=3$

重合时 φ 角相同，所以有

$$a\sin\varphi=(2\times2+1)\frac{6000}{2}=(2\times3+1)\ \frac{\lambda_x}{2}$$

得　$\lambda_x=\frac{5}{7}\times6000=4286$ $\mathring{A}$

例 5 波长 $\lambda=6000$ $\mathring{A}$ 的单色光垂直入射到一光栅上，第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\varphi=0.20$ 与 $\sin\varphi=0.30$ 处，第四级缺级. 求：(1)光栅常数；(2)光栅上狭缝的宽度；(3)在90°＞φ＞-90° 范围内，实际呈现的全部级数.

解：(1)由 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ 式

对应于 $\sin\varphi_1=0.20$ 与 $\sin\varphi_2=0.30$ 处满足：

$$0.20(a+b)=2\times6000\times10^{-10}$$

$$0.30(a+b)=3\times6000\times10^{-10}$$

得　$a+b=6.0\times10^{-6}$ m

(2)因第四级缺级，故此须同时满足

$$(a+b)\sin\varphi=k\lambda$$

$$a\sin\varphi=k'\lambda$$

解得　$a=\frac{a+b}{4}k'=1.5\times10^{-6}k'$

取 $k'=1$，得光栅狭缝的最小宽度为 1.5×10^{-6} m

(3) 由 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$

$$k=\frac{(a+b)\sin\varphi}{\lambda}$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，对应 $k=k_{\max}$

$$\therefore \qquad k_{\max}=\frac{a+b}{\lambda}=\frac{6.0\times10^{-6}}{6000\times10^{-10}}=10$$

因 ±4，±8 缺级，所以在 $-90^{\circ}<\varphi<90^{\circ}$ 范围内实际呈现的全部级数为

$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$ 共 15 条明条纹（$k=\pm10$ 在 $k=\pm90^{\circ}$ 处看不到）.

作业：5、12、14