第 44 讲　衍射光栅　X 射线衍射

教学要求：

了解光栅光谱；X 射线的衍射；布拉格公式。理解光栅的分辨本领、干涉和衍射的区别和联系。 掌握光栅常量、明纹条件、暗纹条件、缺级。

重点与难点：

重点：光栅常量、明纹条件、缺级。

难点：缺级。

15.4 衍射光栅

从上节的讨论我们知道，原则上可以利用单色光通过单缝时所产生的衍射条纹来测定该单色光的波长.但为了测量的准确，要求衍射条纹必须分得很开，条纹既细且明亮.然而对单缝衍射来说，这两个要求难以同时达到.因为若要条纹分得开，单缝的宽度 a 就要很小，这样通过单缝的光能量就少，以致条纹不够明亮且难以看清楚；反之，若加大缝宽 a，虽然观察到的条纹较明亮，但条纹间距变小，不容易分辨.所以实际上测定光波波长时，往往不是使用单缝，而是采用能满足上述测量要求的衍射光栅.

15.4.1 光栅衍射现象

由大量等宽、等间距平行排列的狭缝组成的光学元件称为**光栅**。利用透射光衍射的光栅称透射光栅。利用反射光衍射的光栅称反射光栅。常用的透射光栅是在玻璃片上刻出大量等宽、等间距平行刻痕制成，刻痕处相当于毛玻璃为不易透光部分，两刻痕之间的光滑部分可以透光，相当于一狭缝。还有利用两刻痕间的反射光衍射的光栅,如在镀有金属层的表面上刻出许多平行刻痕,两刻痕间的光滑金属面可以反射光,这种光栅称为**反射光栅**。如图 15-13 为透射式光栅实验的示意图,透光缝宽为 a，不透光的刻痕宽为 b，则 $(a+b)=d$ 称为光栅常数。现代用的衍射光栅，在 1cm 内，可刻上 $10^3 \to 10^4$ 条缝，所以一般的光栅常数约为 $10^{-5} \to 10^{-6} m$ 的数量级。

如图 15-13 所示，平行单色光垂直照射到光栅上，由光栅射出的光线经透镜 L 后，会聚于屏幕 E 上,因而在屏幕上出现平行于狭缝的明暗相间的光栅衍射条纹。这些条纹的特点是：明条纹很亮很窄，相邻明纹间的暗区很宽，衍射图样十分清晰。

15.4.2 光栅衍射规律

光栅是由许多单缝组成的，光栅中每一条透光缝，由于衍射，都将在屏幕上呈现单缝衍射图样，如果光栅的总缝数为 N，这 N 套衍射条纹将完全重合。例如，各缝中 φ 角为零的衍射光（即垂直透镜入射的平行光）经透镜 L 后，都会聚在透镜主光轴的焦点上，即图 15-13 中的 P_0 点，这就是各单缝衍射的中央明纹的中心位置；另一方面，各单缝的衍射光在屏幕

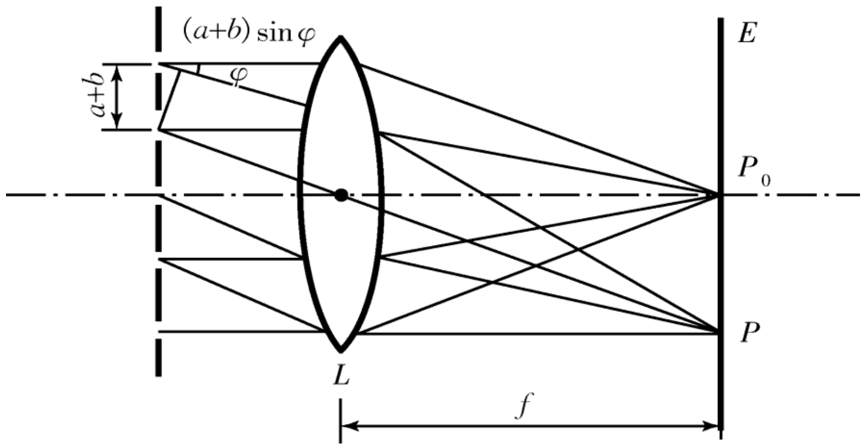


图 15-13　光栅衍射

上重叠时，由于各缝发出的衍射光都是相干光，所以还会产生缝与缝之间的干涉效应，其干涉条纹的明暗分布取决于相邻两缝到会聚点的光程差。因此，光栅的衍射条纹是单缝衍射和多缝干涉的总效果，即 N 个缝的干涉条纹要受到单缝衍射的调制。

1 光栅方程

首先讨论明条纹的位置。当平行单色光垂直照射到光栅时，每个缝均向各方向发出衍射光，发自各缝具有相同的衍射角 φ 的一组平行光都会聚于屏上同一点，如图 15-13 中的 P 点，这些光波叠加彼此产生干涉，称多光束干涉。从图中可以看出，任意两缝射出衍射角为 φ 的两衍射光到达 P 点的光程差都是 $(a+b)\sin\varphi$，如果此值恰好是入射光波长 λ 的整数倍，则这两衍射光在 P 点将满足相干加强条件。这时，其它任意相邻两缝相对应点发出的衍射角 φ 的衍射光，到达 P 点处的光程差也一定是 λ 的整数倍，于是所有各缝沿该衍射角 φ 方向射出的衍射光在屏上会聚时，均相互加强，形成明条纹。这时在 P 点的合振幅是来自一条缝的光的振幅的 N 倍，而合光强将是来自一条缝光强的 N^2 倍，所以光栅的明条纹是很亮的。由此可知，光栅衍射的明条纹位置应满足

$$(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{15-7}$$

式(15-7)称为**光栅方程。**φ 的正负规定与单缝情形相同。k 为明条纹级数。这些明条纹细窄

而明亮，通常将明纹称为主极大条纹。k=0 为零级主极大，也称为**中央明纹**。k=1, 2, …，称为第一级主极大、第二级主极大……，其余类推。式(15-7)中的正负号表示各级明条纹对称分布在中央明纹两侧。从光栅方程可以看出，在波长一定的单色光照射下，光栅常数$(a+b)$

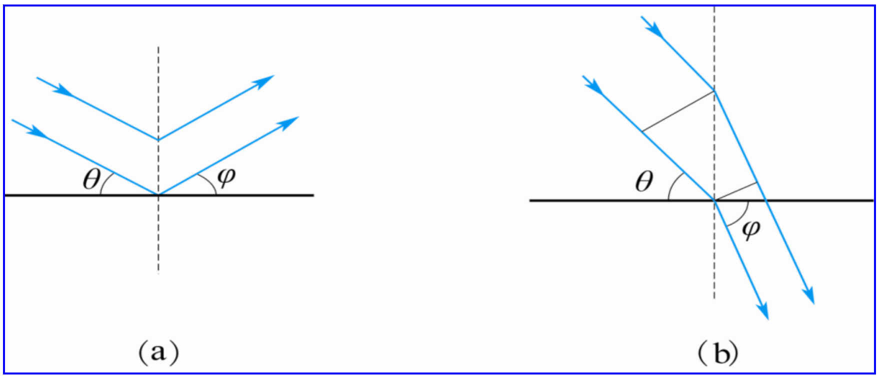


图 15-14 平行单色光倾斜地入射

越小，各级明条纹的φ角越大，因而相邻两个明条纹分得越开。

以上讨论的是平行单色光垂直照射到光栅上的情况。如果平行单色光倾斜地照射到光栅上，入射方向与光栅平面法线之间的夹角为θ，那么相邻两缝的入射光在入射到光栅之前已有光程差$(a+b)\sin\theta$，所以光线斜入射时的光栅方程应为

$$(a+b)(\sin\varphi \pm \sin\theta) = \pm k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \qquad (15\text{-}8)$$

式中φ表示衍射方向与法线间的夹角，均取正值，当φ与θ在法线同侧，如图 15-14（a）所示，上式左边括号中取加号，在异侧时取减号，如图 15-14（b）所示。

2 明条纹

由光栅方程（15-7）可知，相邻两明纹中心的角距离

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k > \sin\varphi_{k+1} - \sin\varphi_k = \frac{(k+1)\lambda}{d} - \frac{k\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} \qquad (15\text{-}9)$$

在λ一定的情况下，d 越小，各级明纹的衍射角则越大，即条纹分布越稀疏，而当d 一定时，各主极大的位置不变，从而它们与中心的角距离与 N无关。

N 越大，主极大明条纹则越窄。以中央明条纹为例，它出现在θ＝0 处。在稍稍偏过一点的$\Delta\theta$方向，如果光栅的最上一条缝和最下一条缝发出的光的光程差等于波长λ，即

$$Nd\sin\Delta\theta = \pm\lambda$$

时，则光栅上下两半宽度内相应的缝发出的光到达屏上将都是反相的，它们都将相消干涉以致总光强为零。由于N 一般都很大，所以$\Delta\theta \approx \sin\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd}$，中央明纹的角宽度是

$2\Delta\theta = \dfrac{2\lambda}{Nd}$。而中央明纹到第一级明条纹的角距离$\theta_1 > \sin\theta_1 = \lambda/d$，$\theta_1$比$2\Delta\theta$的$\dfrac{N}{2}$倍还大，即中央明条纹宽度要比它和第一级明条纹的间距小得多。

对其它级明条纹的分析结果基本类似,明条纹的宽度总是与N成反比，在N很大的情况下，比它们的间距小得多。

3 暗纹条件

在光栅衍射中，相邻两主极大之间还分布着一些暗条纹。这些暗条纹是由各缝射出的衍射光因干涉相消而形成的。可以证明，当φ角满足下述条件

$$(a+b)\sin\varphi = (k+\frac{n}{N})\lambda \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \qquad (15\text{-}10)$$

时，则出现暗条纹。式中，k为主极大级数，N为光栅缝总数，n为正整数，取值为$n = 1, 2, \cdots (N-1)$。由上式可知，在相邻两主极大之间分布有(N－1)个暗条纹。显然，在这(N－1)个暗条纹之间的位置光强不为零，但其强度比各级主极大的强度要小得多，称为次级明条纹，这些次级明条纹的光强仅为主极大的 4%左右。所以，在相邻两主极大之间分布有(N－1)个暗条纹和(N－2)个光强极弱的次级明条纹，这些明条纹几乎是观察不到的，因此实际上在两个主极大之间是一片连续的暗区。由式（15-10）可知，缝数 N 愈多，暗条纹也愈多，因而暗区愈宽，明条纹愈细窄。多光束干涉的结果是:在几乎黑暗的背景上出现了一系列又细又亮的明条纹,而且光栅总缝数越大,所形成的明条纹也越细越亮。图 15-15 给出了光栅衍射图样。

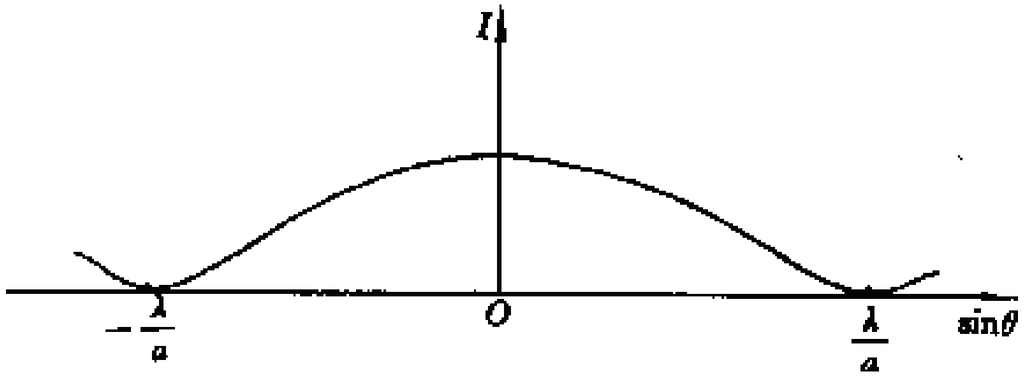
图 15-15　光栅衍射的图象

4 单缝衍射对光强分布的影响

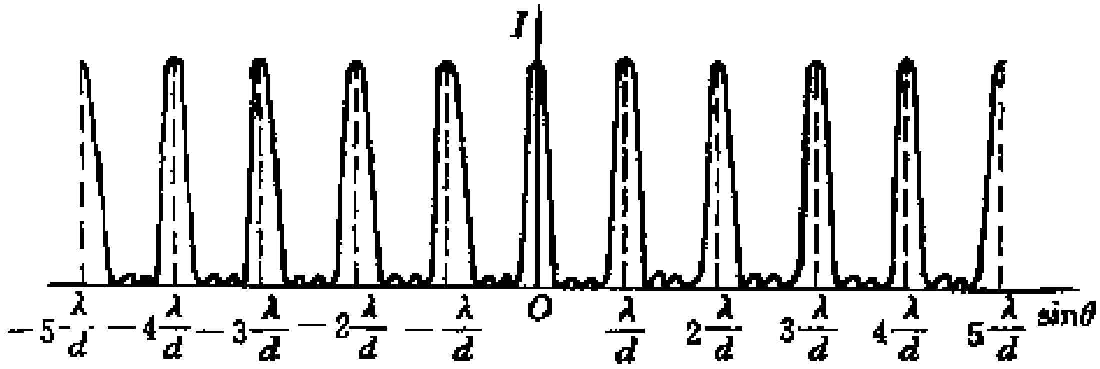
以上讨论多光束干涉时，并没有考虑各缝（单缝）衍射对屏上条纹强度分布的影响。实际上，由于单缝衍射，在不同的φ方向，衍射光的强度是不同的，所以光栅衍射的不同位置的明条纹，是来源于不同光强度的衍射光的干涉加强。就是说，多光束干涉形成的光强分布要受到单缝衍射的调制。单缝衍射光强大的方向明条纹的光强也大，单缝衍射光强小的方向明条纹的光强也小。图 15-16 给出了 N=4, $d = 4a$ 的光栅衍射图样的光强分布图。其中图 15-16（a）

给出缝宽为a的单缝图样的光强分布图，图 15-16（b）给出了多缝干涉图样的光强分布图，多缝干涉和单缝干涉共同决定的光栅衍射的总光强如图 15-16(c)所示。

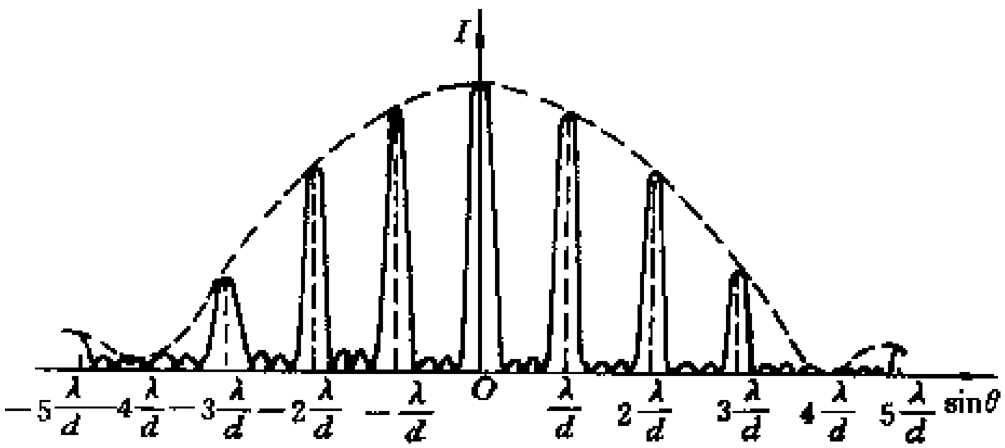
如果光栅缝数很多，每条缝的宽度很小，则单缝衍射的中央明纹区域变得很宽，我们通常观察到的光栅衍射图样，就是各缝的衍射光束在单缝中央明纹区域内的干涉条纹。



(a) 单缝衍射



(b) 多缝干涉



(c) 光栅衍射

图 15-16 光栅衍射的光强分布图

5 缺级现象

前面讨论光栅方程$(a+b)\sin\varphi=\pm k\lambda$时，只是从多光束干涉的角度说明了叠加光强最大而产生明条纹的必要条件，但当这一φ角位置同时也满足单缝衍射暗纹条件$a\sin\varphi=\pm k'\lambda$，可将这一位置看成是光强度为零的“干涉加强”。所以从光栅方程看来应出现某k级明条纹的位置，实际上却是暗条纹，即k级明条纹不出现，这种现象称为光栅的缺级现象。将上述两式相比可知缺级条件为

$$k=\frac{a+b}{a}k' \qquad (k'=1,2,\cdots) \tag{15-11}$$

且满足k为整数，即$(a+b)/a$为整数比（如 2：1，3：2 等等）。如$d=4a$时，k=4, 8，…，缺级，图 15-16 (c)就是这种情形。

15.4.3 光栅光谱

从光栅方程可知，在光栅常数一定时，明条纹衍射角φ的大小与入射光的波长λ有关。因此当用白光照射到光栅上，各种不同波长的光将产生各自分开的主极大明条纹。不同波长的同一级明纹的角位置是不同的，并按波长由短到长的次序自中央向外侧依次分开排列。屏幕上除中央明纹由各种波长的光混合仍为白色外，其两侧将形成各级由紫到红对称排列的彩色光带，这些光带的整体称为光栅光谱。如图 15-17 所示。对于同一级的条纹由于波长短

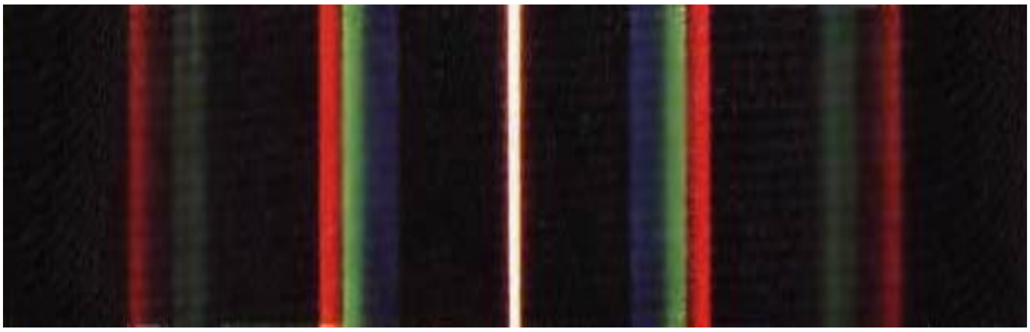


图 15-17 光栅光谱

的光衍射角小，波长长的光衍射角大，所以光谱中紫光靠近零级主极大，红光远离零级主极大。光谱之间有可能发生重叠，级数愈高，重叠情况愈复杂。

物质的光谱可用于研究物质结构，原子、分子的光谱则是了解原子、分子及其运动规律的重要依据。光谱分析是现代物理学研究的重要手段，在工程技术中，也广泛地应用于分析、鉴定等方面。

例 15-5 使波长为 480nm 的单色光垂直入射到每毫米有 250 条狭缝的光栅上，光栅常数为一条缝宽的 3 倍。（1）求第一级谱线的角位置；（2）总共可以观察到几条光谱线？

解 （1）由光栅方程，第一级谱线的角位置为

$$\theta_1 = \arcsin(\lambda/d) = \arcsin(\frac{480\times10^{-9}}{10^{-3}/250}) = \arcsin(0.12) \approx 0.12(\text{rad}) = 6.32^0$$

（2）谱线的最大角位置为$\pi/2$，由光栅方程可知级次的最大值为

$$k_{\max} = \frac{d\sin(\pi/2)}{\lambda} = \frac{(10^{-3}/250)\times1}{480\times10^{-9}} = 8.3$$

由于k只能取整数，所以$k_{\max} = 8$。

由于$d = 3a$，所以$k = 3,6$的级次为缺级，故可能观察到的谱线数为 $k_{\max} \times 2 + 1 - 2\times 2 = 13$。

例 15-6 用白光垂直照射在每厘米中有 6500 条刻线的平面光栅上，求第三级光谱张角。（白光的波长范围为 4000 $\mathring{A}$ ～7600 $\mathring{A}$ ）

解 光栅常数 $$d = \frac{1}{6500}\text{cm} = 1.54\times10^4\ \mathring{A}$$

由光栅方程，第 3 级光谱中

$$\theta_{\min} = \arcsin\frac{3\lambda_{\min}}{d} = \arcsin\frac{3\times4000}{1.54\times10^4} = 51.25^\circ$$
$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{3\lambda_{\max}}{d} = \arcsin\frac{3\times7600}{1.54\times10^4} = \arcsin1.48$$

说明不存在第 3 级完整光谱，即第三级光谱只能出现一部分光谱，这一部分光谱的张角是

$$\Delta\theta = 90^\circ - \theta_{\min} = 38.74^\circ$$

设第 3 级光谱中所能出现的最大波长为$\lambda^{'}$，则有

$$\lambda' = \frac{d\sin90^\circ}{3} = \frac{\frac{1}{6500}\times10^8}{3} = 5130(\mathring{A})$$（绿光）

即第 3 级光谱中只能出现紫、蓝、青、绿等色的光，波长大于 5130 $\mathring{A}$ 大的黄、橙、红等色光则看不到。

例 15-7 在垂直入射于光栅的平行光中，有λ_1和λ_2两种波长，已知λ_1的第 3 级光谱线与λ_2的第 4 级光谱线恰好重合在离中央明条纹为 5mm 处，而λ_2=486.1nm，并发现λ_1的第 5 级光谱线缺级，透镜的焦距为 f=50cm，试求（1）λ_1为多少，光栅常数$(a+b)$为多少？(2) 光栅的最小缝宽a为多少？

解 （1）由光栅方程 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$和题意得

$$(a+b)\sin\varphi = k_1\lambda_1 = \text{k}_2\lambda_2$$

$$\lambda_1=\frac{k_2}{k_1}\lambda_2=\frac{4}{3}\times 486.1=648.1\text{nm}$$

又 $$\frac{x}{f}=\tan\varphi\approx\sin\varphi$$

$$a+b=\frac{k_2\lambda_2}{\sin\varphi}=\frac{f}{x}k_2\lambda_2$$
$$=\frac{0.5\times 4\times 486.1\times 10^{-9}}{5\times 10^{-3}}=1.94\times 10^{-4}m$$

当第 k 级缺级时满足 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ 及 $a\sin\varphi=k'\lambda$

故 $$a=\frac{k'}{k}(a+b)$$

$$a_{\min}=\frac{1\times 1.94\times 10^{-4}}{5}=3.88\times 10^{-5}m$$

例 15-8 一个每毫米均匀刻有 200 条刻线的光栅，用白光照射，在光栅后放一焦距为 f=500cm 的透镜，在透镜的焦平面处有一个屏幕，如果在屏幕上开一个 Δx=1mm 宽的细缝，细缝的内侧边缘离中央极大中心 5.0mm，如图 15-18 所示.试求什么波长范围的可见光可通过细缝？

解 光栅常数为

$$a+b=\frac{1\times 10^{-3}}{200}=5.0\times 10^{-6}\ m$$

θ_1和θ_2都很小，所以 $\sin\theta\approx\tan\theta$，根据光栅方程

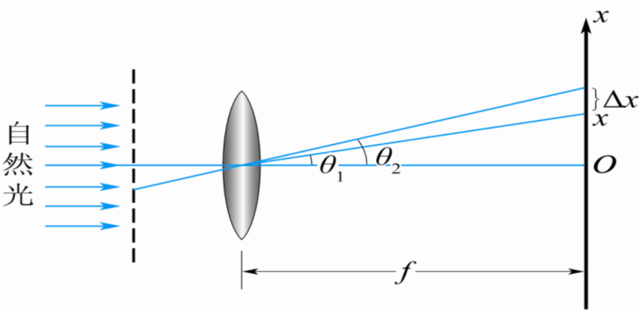


图 15-18 例 15-8 图

$$\sin\theta_1=\frac{k_1\lambda_1}{a+b}\approx\frac{x}{f}\qquad \sin\theta_2=\frac{k_2\lambda_2}{a+b}\approx\frac{x+\Delta x}{f}$$

$$k_1\lambda_1=\frac{x}{f}(a+b)=\frac{5.0\times 10^{-3}\times 5.0\times 10^{-6}}{5}=5.0\times 10^{-9}m=500nm$$

$$k_2\lambda_2=\frac{x+\Delta x}{f}(a+b)=\frac{(5.0+0.1)\times10^{-3}\times5.0\times10^{-6}}{5}=5.1\times10^{-9}m=510nm$$

可通过细缝的可见光波波长范围为

$$500\ nm\le\lambda\le510\ nm$$

*15.5 X 射线衍射

X 射线又称伦琴射线，是伦琴于 1895 年发现的(由于发现 X 射线，伦琴获 1901 年诺贝尔物理学奖)，它是由高压加速的电子撞击金属时辐射出的一种射线。X 射线是一种人眼看不见的具有很强穿透能力的波长很短的电磁波，波长在0.01nm到10nm之间。图 15-19 所

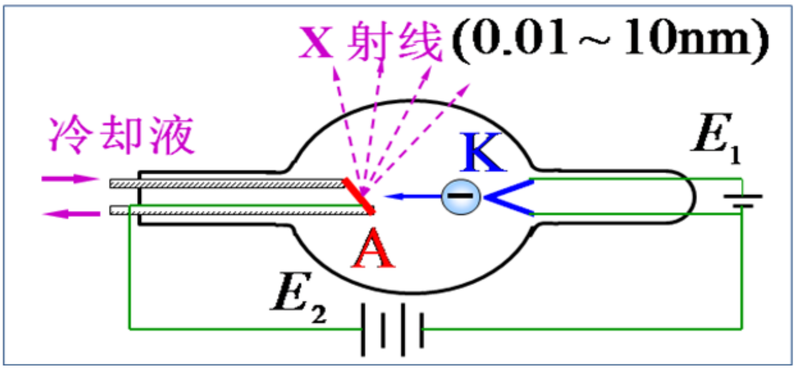


图 15-19　X 射线管

示为 X 射线管的结构示意图。K 是发射电子的热阴极，A 是阳极，两极间加数万伏高压，阴极发射的电子在强电场作用下加速，高速电子撞击阳极而产生 X 射线。

X 射线既然是一种电磁波，也应该和可见光一样有正常的衍射现象。但由于它的波长太短，用普通光栅观察不到 X 射线的衍射现象，而且也无法用机械方法制造出光栅常数与 X 射线波长相近的光栅。1912 年德国物理学家劳厄想到晶体内的原子是有规则排列的，天然晶体实际上就是光栅常数很小的天然三维空间光栅。利用晶体作为光栅，劳厄成功地进行了 X 射线衍射实验。他让一束 X 射线穿过铅板上的小孔照射到晶体上，如图 15-20 所示，结果晶片后面的感光胶片上形成一定规则分布的斑点，称为劳厄斑点。实验的成功既证明了 X 射线的波动性质，也证明了晶体内原子是按一定的间隔、规则排列的。从此，开始广泛利用 X 射线作晶体结构分析。

1913 年，英国物理学家布拉格父子提出了另一种研究 x 射线衍射的方法，他们把晶体看成是由一系列互相平行的原子层（或晶面）所组成，各层之间的距离（晶面间距）为 d，

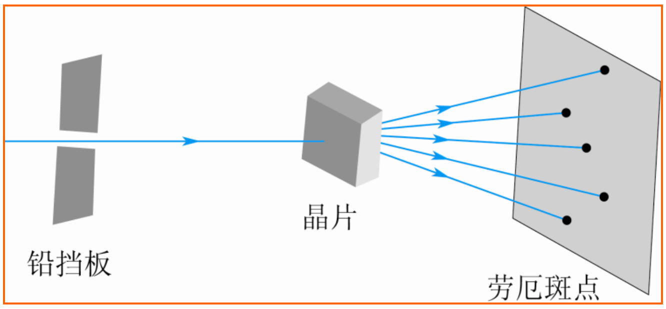


图 15-20 劳厄实验

如图 15-21，小圆点表示晶体点阵中的原子（或离子）。当一束单色的、平行的、波长为 λ 的 x 射线以掠射角 θ 投射在晶体上，一部分为表面层原子反射，其余部分进入晶体内部，被内部各原子所散射。在各原子层所散射的射线中只有按反射定律的反射线的强度为最大。

由图 15-21 可见，上下两原子层所发出的反射线的光程差为

$$\Delta = AC+CB=2d\sin\theta$$

显然各层反射线互相加强而形成亮点的条件是

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (k=1,2,\cdots) \qquad (15\text{-}12)$$

此式称为**布拉格方程。**

由布拉格方程看出，如果晶体结构（晶面间距为 d）为已知，则可测定 x 射线的波长。反之，如果 x 射线波长 λ 为已知，在晶体上衍射，则可测出晶面间距 d，从而可推出晶体结构。这种研究已经发展为一门独立的学科，叫做 **x 射线结构分析**。

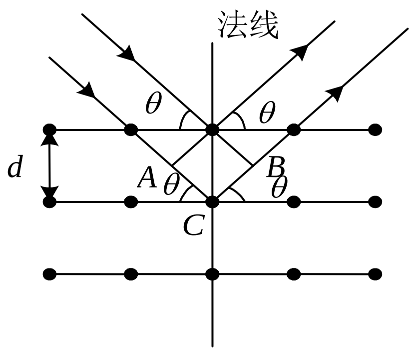


图 15-21 布拉格反射

例 15-9 我们比较两条单色的 X 射线的谱线时注意到，谱线 A 在与一个晶体的光滑面成 30° 的掠射角处给出第 1 级反射极大. 已知谱线 B 的波长为 0.097nm，这谱线 B 在与同一晶体的同一光滑面成 60° 的掠射角处，给出第 3 级反射极大. 试求谱线 A 的波长.

解 根据布喇格公式

$$2d\sin\theta = k\lambda$$

对波长 λ_A 的 X 射线有

$$2d\sin 30^\circ = \lambda_A$$

对波长 λ_B 的 X 射线有

$$2d\sin 60^\circ = 3\lambda_B$$

因此 $$\frac{\lambda_A}{3\lambda_B} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\lambda_A = \frac{3\sin 30^\circ \lambda_B}{\sin 60^\circ} = \frac{3\times 0.097\times 10^{-9}\times \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 0.168\,nm$$

作业：1、2、9